

Direct and Inverse Proportion

प्रत्यक्ष और व्युत्क्रम समानुपात

Lesson 2 of 4 | Ratios Percentages and Commercial Comparisons | Free bilingual workbook

4 में से पाठ 2 | अनुपात प्रतिशत और व्यावसायिक तुलना | निःशुल्क द्विभाषी कार्यपुस्तिका

Use the English or Hindi section. Read the explanations, show your own steps, then check the answers. This focused workbook is part of the four-lesson Ratios Percentages and Commercial Comparisons module.

अंग्रेज़ी या हिंदी खंड पढ़ें। व्याख्या समझें, अपने चरण लिखें, फिर उत्तर जाँचें। यह केंद्रित कार्यपुस्तिका चार पाठों वाले अनुपात प्रतिशत और व्यावसायिक तुलना मॉड्यूल का हिस्सा है।

Choose your section / अपना खंड चुनें

[English lesson and practice](#)

[English quick reference](#)

[हिंदी पाठ और अभ्यास](#)

[हिंदी त्वरित संदर्भ](#)

Original learning practice. Untimed, with no negative marking or pass cutoff. This workbook is not a full RRB CBT simulation or the complete Mathematics course.

मौलिक अध्ययन अभ्यास। समय-सीमा, ऋणात्मक अंकन या उत्तीर्ण होने की न्यूनतम अंक-शर्त नहीं है। यह कार्यपुस्तिका पूरे आरआरबी सीबीटी का अनुकरण या गणित का पूरा पाठ्यक्रम नहीं है।

Direct and Inverse Proportion

What you will learn

Before calculating, decide what stays fixed. Then use that fixed relationship to connect two situations. By the end you should be able to:

- Recognise a direct model from a constant unit rate or quotient
- Recognise an inverse model from a constant product
- Explain the one-unit method and the scale-factor method
- State the conditions needed for fixed work, stock and map-scale problems
- Reject a proposed proportion when its quotient or product changes
- Match units and check whether an answer has a sensible size and direction

This lesson follows Ratio and Proportion and uses earlier fraction and decimal arithmetic. We use positive quantities in our models. In particular, neither variable can be zero in an inverse model with a positive fixed product. A rate such as rupees per kilogram compares different kinds of quantities and carries units. A map ratio compares two lengths in matching units and is unitless. Do not cancel away the meaning of a rate.

1 Retrieve the tools you need

Try these four unscored checks before reading the feedback. Use $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$.

1. Simplify $18/30$.
2. Calculate $(3/5) \times 140$.
3. Convert 1.25 m into centimetres.
4. Calculate $72 \div 0.6$.

Feedback:

1. $18/30 = 3/5$ after dividing numerator and denominator by 6. Their ratio is unchanged because both are divided by the same nonzero number.
2. $(140 \div 5) \times 3 = 28 \times 3 = 84$. Divide first when it keeps the arithmetic simple.
3. $1.25 \times 100 = 125 \text{ cm}$. The numerical value changes because the unit is smaller; the length is unchanged.
4. $72 \div 0.6 = 720 \div 6 = 120$. Multiplying both dividend and divisor by 10 preserves the quotient. Check: $120 \times 0.6 = 72$.

If the first two answers were difficult, revisit exact fractions. If the third failed, write the unit conversion beside the calculation. If the fourth failed, practise decimal division before using unit rates. These are tools for choosing and checking a model, not four new topics to memorise.

Coached block A: keep the same amount per unit

2 Identify the invariant before writing a formula

An invariant is a quantity or relationship that stays unchanged across the situations being compared. Suppose every kilogram of a product has the same price, with no fixed charge or quantity discount. Two kilograms then cost twice as much as one; half a kilogram costs half as much. Each extra kilogram contributes the same amount. The price per kilogram, not the total price, stays fixed.

Let x be the quantity bought and y be its total cost. Dividing y by x tells us the cost of one unit. If that same value k applies throughout the stated model, $y/x = k$, and multiplying by x gives $y = kx$. This is direct proportion. If x changes by a positive factor f , then the cost changes from kx to $k(fx) = f(kx)$; y changes by the same factor f . Halving both quantities also preserves a direct proportion; it is not limited to increases.

For two corresponding pairs, $y_1/x_1 = y_2/x_2$. Rearranging gives $y_2 = y_1 \times (x_2/x_1)$. The two routes mean the same thing:

- One-unit route, also called the unitary method: divide the old total by the old quantity, then multiply by the new quantity
- Scale-factor route: multiply the old total by new quantity $\div$ old quantity

Do not put unlike units into the two entries for the same variable. For example, use minutes in both time entries before comparing them. Also keep the quotient in a consistent order. Cost/quantity is rupees per kilogram; quantity/cost is kilograms per rupee. Both can be constant, but they are reciprocals with different meanings.

Mathematical basis: [NCERT Class VIII: Direct and Inverse Proportions, §11.2, printed pp.129-135](#).

This is the explicitly labelled legacy 2024-25 edition. Our explanations and questions are newly written.

Worked example 1: read a direct-model table

A stated direct model gives these corresponding values. Find the unit rate and y when $x = 9$.

x	y
2	30
4	60
7	105

Name the quantities: x and y are the two positive numerical variables. The model is stated to be direct; the table supplies matching pairs, not two unrelated lists.

Invariant: $y/x = 30/2 = 60/4 = 105/7 = 15$. Thus each one unit of x corresponds to 15 units of y .

One-unit route: $x = 1$ corresponds to $y = 15$, so $x = 9$ corresponds to $y = 9 \times 15 = 135$. Scale-factor route: from $x = 2$ to $x = 9$ the factor is $9/2$. Therefore $y = 30 \times 9/2 = 135$. The factor need not be a whole number.

Reasonableness check: 9 is greater than 7, so y should exceed 105. Also $135/9 = 15$, matching every given quotient. Adding 7 to 30 would preserve a difference, not the stated unit rate.

A finite table can show that its listed pairs fit a model or contradict it. Matching a few rows alone does not prove that an unknown real-world process will follow that model at every other value. Here prediction is justified because the direct model is part of the question.

Worked example 2: find the cost of a fractional quantity

At a fixed price per kilogram, 4 kg of a product costs ₹176. There are no fees or quantity discounts. What does 6.5 kg cost?

What stays fixed: price per kilogram. What changes: mass and total cost. Invariant: $\text{cost}/\text{mass} = ₹176/4 \text{ kg} = ₹44 \text{ per kg}$.

First find one kilogram, then scale: $6.5 \times ₹44 = ₹286$. Equivalently, the mass factor is $6.5/4 = 13/8$, so the cost is $₹176 \times 13/8 = ₹286$. These are the same multiplication and division in a different order.

Reasonableness check: 6 kg costs ₹264 and 7 kg costs ₹308, so ₹286 is in the correct interval. It is exactly halfway between those prices because 6.5 kg is halfway between 6 and 7 kg. Check the invariant: $286/6.5 = 44$ rupees per kg. A result below ₹176 would have the wrong direction.

Worked example 3: convert the time before scaling

An object moves at a constant speed, covering 72 km in 90 minutes. There are no stops. How far does it move in 2.5 hours?

What stays fixed: speed. What changes: elapsed travelling time and distance. Convert first: 2.5 hours = $2.5 \times 60 = 150$ minutes. The decimal .5 hour means half an hour, or 30 minutes, not 5 minutes.

Invariant: distance/time = $72/90 = 0.8$ km per minute. Distance in 150 minutes = $0.8 \times 150 = 120$ km. Alternatively, the time factor is $150/90 = 5/3$, so distance = $72 \times 5/3 = 120$ km.

Reasonableness check: 150 minutes is longer than 90 minutes, so the distance must exceed 72 km. Both factors agree: $120/72 = 150/90 = 5/3$. A second unit check gives 72 km in 1.5 hours, hence 48 km per hour; $48 \times 2.5 = 120$ km. Dividing 72 by 90 and then multiplying by 2.5 without converting units would mix minutes and hours.

Checkpoint A: explain, then calculate

Cover the feedback and answer in your own words.

1. In a direct model, x is multiplied by $3/2$. What happens to y , and why?
2. At the same no-fee price, 2 kg costs ₹70. Find the cost of 0.5 kg and name the invariant.
3. Does knowing that both quantities increase establish direct proportion?

Feedback:

1. y is multiplied by $3/2$, because y/x must stay fixed. It is not increased by the number $3/2$.
2. The invariant is $₹70 \div 2 = ₹35$ per kg. Therefore 0.5 kg costs ₹17.50. It is one quarter of the mass and one quarter of the ₹70 cost.
3. No. You need the same quotient under the stated conditions. A fixed starting fee can make both quantities increase while their quotient changes; we test this in worked example 8.

If you knew the direction but not the invariant, return to section 2. If the one-unit and factor routes disagree, inspect their units and arithmetic rather than choosing whichever answer looks convenient.

Coached block B: keep the same total, then challenge the model

3 Why a fixed product creates inverse proportion

Imagine a fixed number of labels packed with the same number in every full box. The total is labels per box $\times$ number of boxes. If each box holds twice as many labels, half as many boxes are needed, provided the packing divides exactly. The fixed total forces one factor to compensate for the other.

Let the two positive quantities be x and y . If their product has the fixed value k , then $xy = k$. Dividing by the nonzero x gives $y = k/x$. This is inverse proportion. If x is multiplied by f , y must be divided by f , because $(fx) \times (y/f) = xy$. For two situations, $x_1y_1 = x_2y_2$, so $y_2 = y_1 \times (x_1/x_2)$. Notice the old/new factor here, whereas direct proportion uses new/old.

Do not memorise the reversed factor without the reason. Label the fixed product first. In a stock problem it may be person-days at an unchanged daily amount per person. In a fixed-work problem it may be worker-hours under identical steady rates. Neither label is an unconditional law about people.

Mathematical basis: [NCERT Ganita Prakash Grade 8 Part II: Proportional Reasoning-2, §3.6, printed pp.63-65](#), and [NCERT Class VIII Mathematics, Chapter 11, §11.3, printed pp.137-140](#). We state the modelling assumptions explicitly before applying the relationship.

Worked example 4: use the product of each pair

A stated inverse model gives $(x, y) = (3, 24), (4, 18), (6, 12)$. Find y when $x = 9$.

Invariant: $xy = 3 \times 24 = 4 \times 18 = 6 \times 12 = 72$. All three given products agree. At $x = 9$, we need $9 \times y = 72$, so $y = 72/9 = 8$.

The factor route gives the same result: x changes from 3 to 9, a factor of 3. Therefore y changes from 24 to $24/3 = 8$. Multiplying y by 3 would change the product instead of preserving it.

Reasonableness check: increasing x from 6 to 9 should reduce y below 12; 8 does. Substitution gives $9 \times 8 = 72$. The model is stated; three fitting rows alone would not establish an unknown law beyond the supplied data.

Worked example 5: state the work assumptions first

Six workers complete one fixed job in 12 hours. How long would nine workers take for the same job?

Required assumptions: all workers have the same steady work rate; all work together for the whole stated duration; the job can be shared without workers obstructing one another; there is no setup time, coordination overhead, pause or other additional delay. The amount of work is unchanged. These are the conditions of this question, not claims about every workplace.

Each worker contributes one worker-hour in one hour. Because their productivity is identical and steady, 6 workers $\times$ 12 hours delivers 72 worker-hours of the required work. Nine such workers deliver 9 worker-hours each hour.

Invariant: workers $\times$ hours = 72 worker-hours for this fixed job. Therefore $9 \times t = 72$, giving $t = 8$ hours. Factor check: workers increase by $9/6 = 3/2$, so time is multiplied by $2/3$: $12 \times 2/3 = 8$ hours.

Reasonableness check: more identical workers should need less than 12 hours. Also $9 \times 8 = 6 \times 12$, so the required work is unchanged. The number 72 is a total in worker-hours, not the elapsed time for the group. With different work rates or a fixed setup delay, this whole-time inverse calculation would not be justified.

Worked example 6: preserve daily use as well as stock

A fixed food stock lasts 24 people for 15 days. Every person consumes the same daily amount, and that amount is unchanged in both situations. There is no new supply, waste or loss. How many days will the same stock last 30 people?

Think of one person's one-day ration as one unit of stock. The available stock contains $24 \times 15 = 360$ such daily rations. If 30 people each take one daily ration, the stock is used at 30 rations per day.

Invariant: $\text{people} \times \text{days} = 360$ person-days, because the stock and daily amount per person are both fixed. $\text{Duration} = 360/30 = 12$ days. Equivalently, the number of people is multiplied by $30/24 = 5/4$, so duration is multiplied by $4/5$: $15 \times 4/5 = 12$.

Reasonableness check: more people use the stock faster, so 12 should be less than 15. Substitution gives $30 \times 12 = 24 \times 15 = 360$. If each person changed the amount eaten per day, the same stock would no longer imply this same person-days product. Equal daily use within each group is insufficient unless it is also unchanged between the two groups.

4 Choose the relationship from what is fixed

A story about time is not automatically inverse, and a story about money is not automatically direct. At constant speed, distance/time is fixed, so distance and time are direct. For fixed work under the stated capacity assumptions, workers $\times$ time is fixed, so workers and time are inverse. Ask which pair of quantities is changing and which relationship is held constant.

Worked example 7: return to a direct model for a map

On a scale drawing marked 1:25,000, two points are 3.6 cm apart. Find the represented ground distance in metres. Use 100 cm = 1 m.

The scale means drawing length:represented ground length = 1:25,000 in matching units. Thus 1 cm on the drawing represents 25,000 cm on the ground. The scale is fixed while the two lengths change together.

Invariant: ground length/drawing length = 25,000 after both lengths are expressed in the same unit. This quotient is unitless because centimetres cancel with centimetres. Ground distance = $3.6 \times 25,000 = 90,000$ cm. Convert the answer: $90,000/100 = 900$ m.

Reasonableness check: 1 drawing cm represents 250 m, so 3.6 drawing cm should represent $3.6 \times 250 = 900$ m. It lies between 750 m for 3 cm and 1,000 m for 4 cm. The ratio check uses $3.6:90,000 = 1:25,000$; using $3.6:900$ would wrongly compare centimetres directly with metres. This is the distance represented by the drawing, not a road-route length inferred from it.

Map-scale basis: [NCERT Ganita Prakash, Grade 8 Part II, Chapter 3, §3.2, printed pp.56-57](#). The distinction between represented ground distance and road distance matters even when the arithmetic is correct.

Worked example 8: reject two tempting shortcuts

Claim A: A fee of ₹40 plus ₹12 per kilometre is directly proportional to the positive distance travelled.

What is fixed: the ₹40 starting charge and the ₹12 added per kilometre. Those facts do not say that total fee per kilometre is fixed. At 1 km the total is ₹52; at 2 km it is ₹64. Proposed invariant test: fee/distance is $52/1 = ₹52$ per km, but $64/2 = ₹32$ per km. It changes, so total fee and distance are not directly proportional. The correct fee relationship is $C = 40 + 12d$, with C in rupees and d in kilometres. The distance-dependent part $C - 40 = 12d$ is direct, but the question concerns the whole fee C. A valid additive model is not an arithmetic mistake. Reasonableness check: doubling 1 km to 2 km does not double ₹52 to ₹104; the actual fee is ₹64. Only the distance charge doubles; the starting charge is paid once.

Claim B: The pairs (2, 10), (3, 9), (4, 8) are inverse because y decreases when x increases.

Proposed invariant test: $xy = 2 \times 10 = 20$; $3 \times 9 = 27$; $4 \times 8 = 32$. The product changes, so these data are not inverse. They are not direct either: y/x is 5, 3 and 2. Here $x + y$ stays at 12, showing that a fixed sum can also make one quantity decrease as the other increases. Reasonableness check: from $x = 2$ to $x = 4$, an inverse model would halve y from 10 to 5. The given y is 8, so even this factor check rejects the claim. Every supplied row matters when testing a proposed invariant.

Both proposed claims fail. Direction is a useful final check, but a constant quotient or product is the deciding test. The direct-proportion warning is supported by [NCERT Class VIII Mathematics, Chapter 11, §11.2, printed pp.131-132](#); these fee and decreasing-table examples are our original counterexamples.

Checkpoint B: select, calculate and limit the claim

Try without using the quick reference.

1. In a positive inverse model, x is multiplied by $5/4$. What factor multiplies y?
2. For an unchanged fixed job, why is “there are more workers” insufficient on its own to calculate the new time by inverse proportion?
3. A positive table has pairs (2, 15), (3, 10), (5, 6). Do its rows fit inverse proportion? Does the table alone prove an unknown process follows the rule for every x?
4. A stock lasts 10 people 18 days. Every person's daily use is equal and unchanged; there is no replenishment or loss. How long for 15 people?

Feedback:

1. The factor is $4/5$. The two factors multiply to 1, leaving xy unchanged.
2. The workers must have identical steady rates, share the same fixed work without interference, and have no additional setup or coordination delay. Different rates or overhead can prevent workers $\times$ total elapsed time from being fixed.
3. Yes, the supplied products are all 30. No, a few matching rows do not prove an unknown process follows that law elsewhere. A prediction outside the table needs the model or conditions that justify it.
4. The invariant is $10 \times 18 = 180$ person-days. Duration = $180/15 = 12$ days; $15 \times 12 = 180$, and more people means fewer days under these conditions.

If you chose the model only from the direction, revisit worked example 8. If your product was correct but the story assumptions were missing, revisit cases 5-6. If your map answer was 100 times too large or too small, revisit case 7 and write the conversion as a separate step.

5 Independent practice

Attempt all twelve questions before reading the key. Choose one option and write the invariant or the test that rejects the model. This is untimed learning practice: 1 mark per item, 0 negative marks and no pass cutoff. It is not a full RRB CBT simulation.

1. In a stated direct model, $x = 3$ gives $y = 21$. What is y when $x = 8$?

- | | |
|--------|-----------|
| A. 26 | B. 56 |
| C. 168 | D. $63/8$ |
-

2. A positive inverse model has $x = 4$ and $y = 27$. What is its constant product k ?

- | | |
|-----------|-------|
| A. $27/4$ | B. 31 |
| C. 108 | D. 23 |
-

3. Three identical notebooks cost ₹81 at a fixed unit price, with no fees or quantity discount. What do five cost?

- | | |
|-----------|---------|
| A. ₹48.60 | B. ₹83 |
| C. ₹405 | D. ₹135 |
-

4. In a positive inverse model, x doubles. By what factor is y multiplied?

- | | |
|----------|------|
| A. $1/2$ | B. 2 |
| C. -2 | D. 1 |
-

5. A fixed batch of 2,400 labels is packed with 30 labels in each full box. If the same batch is repacked with 40 labels in each full box and none left over, how many boxes are needed?

- | | |
|----------------------|-------|
| A. 80 | B. 60 |
| C. $106 \frac{2}{3}$ | D. 70 |
-

6. A copier prints at a fixed rate with no setup delay or interruption. It prints 84 pages in 3 minutes. How many pages does it print in 2.5 minutes?

- | | |
|---------------------------|----------------|
| A. $58 \frac{1}{3}$ pages | B. 56 pages |
| C. 70 pages | D. 100.8 pages |
-

7. Eight identical machines, each working at the same steady rate, make one fixed batch in 15 hours. The work is shared without interference; there is no setup time, interruption or coordination overhead. How long do 12 such machines, all working together, need for the same batch under those conditions?

- A. 10 hours
 - B. 22.5 hours
 - C. 11 hours
 - D. 120 hours
-

8. A drawing has scale 1:40,000. Two points are 2.8 cm apart on it. What represented ground distance is this in metres? Use 100 cm = 1 m.

- A. 112,000 m
 - B. 112 m
 - C. 1.12 m
 - D. 1,120 m
-

9. Fixed supplies last 18 people for 20 days. Each person uses the same daily amount, unchanged in both situations; there is no replenishment or loss. How many days will the same supplies last 24 people?

- A. $26 \frac{2}{3}$ days
 - B. 15 days
 - C. 14 days
 - D. 360 days
-

10. A fare is a fixed ₹35 plus ₹9 for each kilometre. Is the total fare directly proportional to positive distance? Choose the correct judgement and reason.

- A. Yes; the added charge is ₹9 for each kilometre
 - B. Yes; fare and distance both increase
 - C. No; at 1 km and 2 km the total fare/distance values are ₹44/km and ₹26.50/km
 - D. No; fare and distance are inverse, so more distance means less fare
-

11. The given pairs are $(x, y) = (2, 18), (3, 15), (6, 6)$. A learner calls them inverse because y falls as x rises. Which assessment is correct?

- A. They are inverse because y decreases
 - B. They are inverse because the first and last products are both 36
 - C. They are direct because every y/x equals 9
 - D. They are not inverse because the products are 36, 45 and 36
-

12. Five workers finish one fixed job in 18 hours. For a prediction about nine workers doing the same job, assume all workers have identical steady rates, all work together, and work can be shared without interference, setup delay or coordination overhead. Which conclusion respects both the calculation and its assumptions?

- A. 10 hours under the stated conditions; without them this prediction need not hold
 - B. 10 hours for any nine workers, even when their rates or delays differ
 - C. 32.4 hours under the stated conditions because time grows with worker count
 - D. 14 hours because adding four workers subtracts four hours
-

6 Explained answer key

1. B is correct: the invariant is $y/x = 21/3 = 7$, so $y = 7 \times 8 = 56$. Check: $56/8 = 7$. A adds the change in x , $8 - 3 = 5$, to 21; equal additions do not preserve this rate. C multiplies 21 by 8 without first dividing by the old $x = 3$. D uses $21 \times 3/8 = 63/8$, the inverse factor, and wrongly makes y smaller when x increases in this direct model.
2. C is correct: inverse proportion preserves xy , so $k = 4 \times 27 = 108$. Substitution into $y = k/x$ gives $108/4 = 27$. A calculates y/x , the quotient used to test a direct model, not the requested product. B adds $4 + 27 = 31$; an inverse model does not generally keep this sum fixed. D subtracts $27 - 4 = 23$; a fixed difference is not the inverse invariant.
3. D is correct: one notebook costs $81/3 = ₹27$, so five cost $5 \times 27 = ₹135$. The invariant is cost/notebook count = ₹27 per notebook. A uses the inverse calculation $81 \times 3/5 = 48.60$ and makes more notebooks cost less. B adds the two extra notebooks to the rupee amount as $81 + 2$, mixing count with money. C uses $81 \times 5 = 405$, treating the cost of three notebooks as the cost of one.
4. A is correct: $(2x) \times (y/2) = xy$, so the factor is $1/2$. B also doubles y and makes the product four times its old value. C makes positive y negative; multiplying by -2 is neither halving nor subtracting 2. Even subtracting a fixed 2 would not in general preserve the product. D leaves y unchanged, which would double xy instead of keeping it fixed.
5. B is correct: labels per box $\times$ boxes = 2,400, so boxes = $2,400/40 = 60$. The old count was $2,400/30 = 80$; $80 \times 30/40 = 60$ gives the inverse scaling. A keeps the old 80 boxes despite the larger packing size. C uses the direct factor $80 \times 40/30 = 106 \frac{2}{3}$; it fails the fixed-total test and cannot be the count of full boxes here. D subtracts the packing increase, $40 - 30 = 10$, from 80; 70 boxes at 40 labels would hold 2,800, not 2,400.
6. C is correct: the rate is $84/3 = 28$ pages per minute, so $28 \times 2.5 = 70$ pages. Check: a shorter time gives fewer than 84 pages, and $70/2.5 = 28$. A results from misreading 2.5 minutes as 2 minutes 5 seconds: $84 \times 125/180 = 58 \frac{1}{3}$. In fact 2.5 minutes is 150 seconds, or 2 minutes 30 seconds. B counts only 2 minutes, omitting the half-minute. D uses the inverse calculation $84 \times 3/2.5 = 100.8$ even though output at a fixed rate is direct with time.
7. A is correct: the fixed batch requires $8 \times 15 = 120$ machine-hours, so $12t = 120$ and $t = 10$ hours. Check: $12 \times 10 = 120$ and more identical machines take less time. B uses the direct factor $15 \times 12/8 = 22.5$, increasing time instead. C subtracts the four extra machines from 15 hours, mixing different quantities and failing $12 \times 11 = 132$. D mistakes the total 120 machine-hours for the group's elapsed hours; divide by 12 machines to obtain elapsed time.
8. D is correct: the scale compares matching length units, so ground distance = $2.8 \times 40,000 = 112,000$ cm = 1,120 m. Check: one drawing centimetre represents 400 m; $2.8 \times 400 = 1,120$. A relabels centimetres as metres without dividing by 100. B divides the centimetre value by 1,000 instead of 100. C obtains the number 1.12 by converting to kilometres but incorrectly labels it metres. This represented distance does not by itself give a road-route length.
9. B is correct: the invariant is people $\times$ days = $18 \times 20 = 360$ person-days at the unchanged daily amount per person. Thus days = $360/24 = 15$, and $24 \times 15 = 360$. A uses the direct factor $20 \times 24/18 = 26 \frac{2}{3}$ and wrongly makes the stock last longer for more people. C subtracts the six extra people from 20 days, mixing units; $24 \times 14 = 336$, not 360. D labels the total 360 person-days as elapsed days without dividing by 24 people.

10. C is correct: $F = 35 + 9d$ gives $F = ₹44$ at 1 km and ₹53 at 2 km. Thus F/d changes from 44 to 26.50 rupees per km, so it is not direct. A confuses the constant added charge ₹9/km with the average total fare per kilometre, which includes the fixed ₹35. B uses direction alone, an insufficient test. D correctly starts with 'No' but falsely calls the relation inverse: the fare increases, and the products $1 \times 44 = 44$ and $2 \times 53 = 106$ differ. Only $F - 35$ is directly proportional to distance.

11. D is correct: $2 \times 18 = 36$, $3 \times 15 = 45$ and $6 \times 6 = 36$. One mismatching row is enough to reject a constant-product model for the supplied data. A checks only direction, not the product. B skips the middle row; agreement at the endpoints cannot cancel a contradiction. C miscalculates the quotients: $18/2 = 9$, $15/3 = 5$ and $6/6 = 1$, so the table is not direct either.

12. A is correct: under the stated assumptions the fixed job needs $5 \times 18 = 90$ worker-hours. Nine such workers need $90/9 = 10$ hours, and $9 \times 10 = 5 \times 18$. B has the same numerical answer but wrongly extends it to unequal rates or additional delays; worker count alone then does not establish the fixed product. C uses the direct factor $18 \times 9/5 = 32.4$ instead of the inverse factor. D uses the additive change $18 - 4 = 14$; $9 \times 14 = 126$ worker-hours does not match 90.

7 Let an error choose what to revisit

- Questions 1, 3, 6: revisit block A for unit rates and one-unit reasoning
- Questions 2, 4, 5: revisit the start of block B for fixed products and reciprocal factors
- Questions 7, 9, 12: revisit cases 5-6 for fixed work/stock and rate conditions
- Question 8: revisit case 7 for matching length units and scale
- Questions 10-11: revisit case 8 to test every quotient/product rather than direction alone

After revisiting, retry the relevant item without the key and explain why each of its other three options fails.

Sources and lesson boundary

The official RRB mathematics list includes Ratio and Proportion: [RRB CEN 09/2025, §14.1, printed p.28](#). This establishes topic scope; it is not a claim about question frequency or a prediction of a future exam.

The mathematical bases for direct and inverse relationships are NCERT Class VIII Mathematics, Chapter 11 §11.2 pp.129-137 and §11.3 pp.137-143, and NCERT Ganita Prakash, Grade 8 Part II, Chapter 3 §3.6 pp.63-65. For map scale, see NCERT Ganita Prakash, Grade 8 Part II, Chapter 3 §3.2 pp.56-57. All exposition, worked cases, practice and counterexamples here are independently written around the cited concepts; no textbook question or scan is reproduced. Identical steady rates, fixed work, unchanged daily use per person and absence of overhead are explicit conditions of our models. Combined unequal-worker rates, pipes, relative speed and compound proportion with several changing quantities are outside this lesson.

Analogy

Think of a stack of identical rectangular cards laid flat in a single row, with no gaps or overlaps. If each card is 6 cm wide, twice as many cards make twice the total width. The fixed width per card is a quotient: total width/card count = 6 cm per card. This pictures a direct relationship.

Now keep one 60 cm ribbon fixed and cut it into equal pieces with no material lost. More equal pieces mean shorter pieces: 5 pieces are 12 cm each, whereas 10 pieces are 6 cm each. Piece count $\times$ length per piece remains 60 cm. This pictures an inverse relationship because the whole ribbon, not the piece length, is fixed.

The useful question in both pictures is "What are we keeping unchanged?" The pictures have limits: unequal cards, gaps, unequal ribbon pieces or cutting loss change the relationships. They also do not prove that any larger group of workers is proportionally faster; that needs its own equal-rate and no-overhead assumptions. A picture helps you name the invariant, but does not replace checking the story's conditions.

Quick reference

Choose before calculating

1. Label the two changing quantities and write what stays fixed.
2. Put both entries for the same quantity in the same unit.
3. Test the invariant, then calculate; substitute the answer and check its direction.

Direct proportion: same quotient

- $y/x = k$; $y = kx$, for positive values used here
- $y_2 = y_1 \times (x_2/x_1)$: x multiplied by f means y multiplied by f
- One-unit method: old $y \div$ old x , then multiply by new x
- Typical condition: unchanged unit price with no fee/discount, or unchanged output rate with no setup delay
- Keep rate units: ₹/kg, pages/minute, km/hour

Inverse proportion: same product

- $xy = k$; $y = k/x$; x and y are positive and $x \neq 0$
- $y_2 = y_1 \times (x_1/x_2)$: x multiplied by f means y multiplied by $1/f$
- Fixed work: workers $\times$ time only for identical steady workers, unchanged divisible work, no interference or extra delay
- Fixed stock: people $\times$ days only when each person's equal daily use is unchanged in both situations, with no replenishment/loss
- Fixed packing: items per full box $\times$ box count = total items; respect whole-box feasibility

Units and traps

- 1 hour = 60 minutes; 2.5 minutes = 2 minutes 30 seconds
- 1 m = 100 cm; 1 km = 1,000 m = 100,000 cm
- Scale 1:n means drawing length:represented ground length in matching units = 1:n; multiply drawing length by n, then convert the answer's unit
- Map distance is represented ground distance, not an assumed road-route length
- Both rising does not prove direct; opposite movement does not prove inverse
- A fixed fee in total cost usually defeats the direct model: test total cost/quantity
- Check every supplied row. Matching finite rows shows compatibility, not a universal real-world law
- If neither the quotient nor product is fixed, do not force either model

Error repair

Wrong units: rewrite conversions. Wrong direction: recheck the chosen model. Correct direction but wrong value: test the actual quotient/product. Missing assumptions: the numerical prediction is not yet justified.

प्रत्यक्ष और व्युत्क्रम समानुपात

आप क्या सीखेंगे

गणना से पहले तय करें कि क्या स्थिर रहता है। फिर उसी स्थिर संबंध से दो स्थितियों को जोड़ें। इस पाठ के अंत तक आप:

- स्थिर इकाई दर या भागफल से प्रत्यक्ष समानुपात पहचान सकेंगे
- स्थिर गुणनफल से व्युत्क्रम समानुपात पहचान सकेंगे
- एक इकाई का मान निकालने की विधि और गुणक की विधि समझा सकेंगे
- निश्चित कार्य, भंडार और चित्र के पैमाने वाले प्रश्नों की आवश्यक शर्तें बता सकेंगे
- भागफल या गुणनफल बदलने पर प्रस्तावित समानुपात को गलत ठहरा सकेंगे
- इकाइयाँ समान करके उत्तर का परिमाण और परिवर्तन की दिशा जाँच सकेंगे

यह पाठ अनुपात और समानुपात के बाद आता है तथा पहले सीखी भिन्न और दशमलव की गणनाओं का उपयोग करता है। हमारे मॉडल में राशियाँ धन हैं। विशेष रूप से, धन स्थिर गुणनफल वाले व्युत्क्रम मॉडल में कोई भी चर शून्य नहीं हो सकता। रुपये प्रति किलोग्राम जैसी दर अलग प्रकार की राशियों की तुलना करती है, इसलिए उसकी इकाई होती है। चित्र का पैमाना समान इकाइयों में दो लंबाइयों का अनुपात है, इसलिए वह इकाई-रहित है। सरलीकरण करते समय दर का अर्थ न मिटाएँ।

1 आवश्यक साधन याद करें

प्रतिक्रिया पढ़ने से पहले बिना अंक के ये चार जाँच-प्रश्न हल करें। $1\text{ m} = 100\text{ cm}$ लें।

1. $18/30$ सरल करें।
2. $(3/5) \times 140$ निकालें।
3. 1.25 m को सेंटीमीटर में बदलें।
4. $72 \div 0.6$ निकालें।

प्रतिक्रिया:

1. अंश और हर, दोनों को 6 से भाग देने पर $18/30 = 3/5$ । एक ही अशून्य संख्या से दोनों को भाग देने के कारण अनुपात नहीं बदलता।
2. $(140 \div 5) \times 3 = 28 \times 3 = 84$ । जहाँ गणना आसान हो, पहले भाग दें।
3. $1.25 \times 100 = 125\text{ cm}$ । छोटी इकाई लेने से संख्यात्मक मान बदलता है, लंबाई नहीं।
4. $72 \div 0.6 = 720 \div 6 = 120$ । भाज्य और भाजक, दोनों को 10 से गुणा करने पर भागफल नहीं बदलता। जाँच: $120 \times 0.6 = 72$ ।

पहले दो उत्तर कठिन लगे हों तो सटीक भिन्नों की गणना दोहराएँ। तीसरे में गलती हो तो गणना के पास इकाई-रूपांतरण लिखें। चौथे में गलती हो तो इकाई दर लगाने से पहले दशमलव से भाग देना दोहराएँ। ये मॉडल चुनने और जाँचने के साधन हैं, याद करने के लिए चार नए विषय नहीं।

निर्देशित अभ्यास खंड A: प्रति इकाई मात्रा समान रखें

2 सूत्र लिखने से पहले अपरिवर्ती संबंध पहचानें

अपरिवर्ती संबंध वह है जो तुलना की जा रही स्थितियों में नहीं बदलता। मान लें कि किसी वस्तु के हर किलोग्राम की कीमत समान है; कोई स्थिर शुल्क या अधिक मात्रा खरीदने पर छूट नहीं है। तब दो किलोग्राम की कीमत एक किलोग्राम की दुगुनी और आधे किलोग्राम की कीमत आधी होगी। हर अतिरिक्त किलोग्राम कुल कीमत में समान राशि जोड़ता है। प्रति किलोग्राम कीमत स्थिर है, कुल कीमत नहीं।

खरीदी गई मात्रा को x और कुल कीमत को y कहें। y को x से भाग देने पर एक इकाई की कीमत मिलती है। दिए मॉडल में यह मान k हर जगह समान हो तो $y/x = k$ । दोनों ओर x से गुणा करने पर $y = kx$ । इसे प्रत्यक्ष समानुपात (सीधा समानुपात) कहते हैं। यदि x को धन गुणक f से गुणा करें, तो कीमत kx से $k(fx) = f(kx)$ हो जाती है; अर्थात् y भी उसी गुणक f से बदलता है। दोनों राशियों को आधा करने पर भी प्रत्यक्ष समानुपात बना रहता है; यह केवल बढ़ने तक सीमित नहीं है।

दो संगत युग्मों के लिए $y_1/x_1 = y_2/x_2$ । इससे $y_2 = y_1 \times (x_2/x_1)$ मिलता है। दो विधियाँ एक ही संबंध का उपयोग करती हैं:

- पहले एक इकाई का मान निकालें: पुराने कुल को पुरानी मात्रा से भाग दें, फिर नई मात्रा से गुणा करें। इसे ऐकिक विधि कहते हैं।
- गुणक विधि: पुराने कुल को नई मात्रा $\div$ पुरानी मात्रा से गुणा करें

एक ही चर के दो मानों में अलग इकाइयाँ न रखें। उदाहरण के लिए, समय के दोनों मानों को मिनट में बदलकर तुलना करें। भागफल का क्रम भी समान रखें। कीमत/मात्रा रुपये प्रति किलोग्राम है; मात्रा/कीमत किलोग्राम प्रति रुपया है। दोनों स्थिर हो सकते हैं, लेकिन वे एक-दूसरे के व्युत्क्रम हैं और उनके अर्थ अलग हैं।

गणितीय आधार: [NCERT कक्षा VIII, अध्याय 11, §11.2, मुद्रित पृ.129-135](#)। यह स्पष्ट रूप से चिह्नित पुराना 2024-25 संस्करण है। यहाँ की व्याख्याएँ और प्रश्न नए लिखे गए हैं।

हल उदाहरण 1: प्रत्यक्ष मॉडल की सारणी पढ़ें

दिए गए प्रत्यक्ष समानुपाती मॉडल में नीचे के संगत मान हैं। इकाई दर तथा $x = 9$ पर y निकालें।

x	y
2	30
4	60
7	105

राशियों को पहचानें: x और y दो धन संख्यात्मक चर हैं। प्रश्न में मॉडल को प्रत्यक्ष बताया गया है; सारणी में संगत युग्म हैं, दो असंबद्ध सूचियाँ नहीं।

अपरिवर्ती संबंध: $y/x = 30/2 = 60/4 = 105/7 = 15$ । इसलिए x की हर एक इकाई के लिए y की 15 इकाइयाँ हैं।

ऐकिक विधि: $x = 1$ पर $y = 15$, इसलिए $x = 9$ पर $y = 9 \times 15 = 135$ । गुणक विधि: $x = 2$ से $x = 9$ तक गुणक $9/2$ है। इसलिए $y = 30 \times 9/2 = 135$ । गुणक का पूर्ण संख्या होना आवश्यक नहीं है।

औचित्य-जाँच: 9, 7 से बड़ा है, इसलिए y को 105 से अधिक होना चाहिए। साथ ही $135/9 = 15$, जो हर दिए भागफल के बराबर है। 30 में 7 जोड़ने से अंतर स्थिर रहेगा, दी गई इकाई दर नहीं।

सीमित सारणी से पता चल सकता है कि उसके दिए युग्म किसी मॉडल के अनुकूल हैं या उसे गलत ठहराते हैं। कुछ पंक्तियों के मिलने से यह सिद्ध नहीं होता कि कोई अज्ञात वास्तविक प्रक्रिया हर दूसरे मान पर भी उसी मॉडल का पालन करेगी। यहाँ आगे का मान निकालना उचित है क्योंकि प्रश्न में प्रत्यक्ष मॉडल दिया गया है।

हल उदाहरण 2: भिन्नात्मक मात्रा की कीमत निकालें

स्थिर प्रति-किलोग्राम कीमत पर 4 kg वस्तु की कीमत ₹176 है। कोई शुल्क या मात्रा-आधारित छूट नहीं है। 6.5 kg की कीमत क्या होगी?

स्थिर क्या है: प्रति किलोग्राम कीमत। बदलता क्या है: द्रव्यमान और कुल कीमत। अपरिवर्ती संबंध: कीमत/द्रव्यमान = ₹176/4 kg = ₹44 प्रति kg।

पहले एक किलोग्राम की कीमत निकालकर गुणा करें: $6.5 \times ₹44 = ₹286$ । दूसरी विधि में द्रव्यमान का गुणक $6.5/4 = 13/8$ है, इसलिए कीमत $₹176 \times 13/8 = ₹286$ । दोनों विधियों में वही गुणा और भाग अलग क्रम में किए गए हैं।

औचित्य-जाँच: 6 kg की कीमत ₹264 और 7 kg की ₹308 है; ₹286 इनके बीच है। यह दोनों कीमतों के ठीक मध्य में है क्योंकि 6.5 kg, 6 और 7 kg के मध्य में है। अपरिवर्ती संबंध जाँचें: $286/6.5 = 44$ रुपये प्रति kg। ₹176 से कम उत्तर आने पर परिवर्तन की दिशा गलत होगी।

हल उदाहरण 3: गुणा करने से पहले समय बदलें

एक वस्तु स्थिर चाल से बिना रुके 90 मिनट में 72 km चलती है। वह 2.5 घंटे में कितनी दूरी तय करेगी?

स्थिर क्या है: चाल। बदलता क्या है: चलने का समय और दूरी। पहले रूपांतरण करें: 2.5 घंटे = $2.5 \times 60 = 150$ मिनट। दशमलव .5 घंटे का अर्थ आधा घंटा, यानी 30 मिनट है; 5 मिनट नहीं।

अपरिवर्ती संबंध: दूरी/समय = $72/90 = 0.8$ km प्रति मिनट। 150 मिनट में दूरी = $0.8 \times 150 = 120$ km। दूसरी विधि में समय का गुणक $150/90 = 5/3$ है, इसलिए दूरी = $72 \times 5/3 = 120$ km।

औचित्य-जाँच: 150 मिनट, 90 मिनट से अधिक हैं, इसलिए दूरी 72 km से अधिक होनी चाहिए। दोनों गुणक मिलते हैं: $120/72 = 150/90 = 5/3$ । दूसरी इकाई में जाँचें: 1.5 घंटे में 72 km, इसलिए चाल 48 km प्रति घंटा है; $48 \times 2.5 = 120$ km। 72 को 90 से भाग देकर बिना इकाई बदले 2.5 से गुणा करना मिनट और घंटे को मिलाना होगा।

जाँच-बिंदु A: पहले समझाएँ, फिर निकालें

प्रतिक्रिया छिपाकर अपने शब्दों में उत्तर दें।

1. प्रत्यक्ष मॉडल में x को $3/2$ से गुणा किया जाता है। y में क्या परिवर्तन होगा और क्यों?
2. उसी बिना शुल्क वाली कीमत पर 2 kg की कीमत ₹70 है। 0.5 kg की कीमत निकालें और अपरिवर्ती संबंध बताएँ।
3. क्या दोनों राशियों का बढ़ना प्रत्यक्ष समानुपात सिद्ध करता है?

प्रतिक्रिया:

1. y को भी $3/2$ से गुणा किया जाता है, क्योंकि y/x स्थिर रहना चाहिए। y में संख्या $3/2$ जोड़ी नहीं जाती।
2. अपरिवर्ती दर $₹70 \div 2 = ₹35$ प्रति kg है। इसलिए 0.5 kg की कीमत ₹17.50 है। द्रव्यमान चौथाई है और कीमत भी ₹70 की चौथाई है।
3. नहीं। दी गई शर्तों के अंतर्गत भागफल समान चाहिए। स्थिर शुरुआती शुल्क के कारण दोनों राशियाँ बढ़ सकती हैं, फिर भी उनका भागफल बदल सकता है; उदाहरण 8 में इसे जाँचेंगे।

यदि दिशा पता थी, लेकिन अपरिवर्ती संबंध नहीं, तो खंड 2 दोहराएँ। ऐकिक विधि और गुणक विधि के उत्तर अलग हों तो सुविधाजनक उत्तर चुनने के बजाय इकाइयाँ और गणना जाँचें।

निर्देशित अभ्यास खंड B: कुल समान रखें, फिर मॉडल को परखें

3 स्थिर गुणनफल से व्युत्क्रम समानुपात क्यों बनता है

मान लें कि निश्चित संख्या में लेबल ऐसे पैक करने हैं कि हर पूरा डिब्बा बराबर लेबल रखे। कुल लेबल = प्रति डिब्बा लेबल × डिब्बों की संख्या। यदि हर डिब्बे में दुगुने लेबल रखें, तो आधे डिब्बे चाहिए, बशर्ते पैकिंग पूरी तरह विभाजित हो। कुल स्थिर होने के कारण एक गुणक में परिवर्तन की भरपाई दूसरा गुणक करता है।

दो धन राशियों को x और y कहें। यदि उनका गुणनफल स्थिर k है, तो $xy = k$ । अशून्य x से भाग देने पर $y = k/x$ । इसे व्युत्क्रम समानुपात कहते हैं। x को f से गुणा करने पर y को f से भाग देना होगा, क्योंकि $(fx) \times (y/f) = xy$ । दो स्थितियों के लिए $x_1y_1 = x_2y_2$, इसलिए $y_2 = y_1 \times (x_1/x_2)$ । ध्यान दें कि यहाँ पुराना/नया गुणक है, जबकि प्रत्यक्ष समानुपात में नया/पुराना होता है।

कारण समझे बिना उलटा गुणक न याद करें। पहले स्थिर गुणनफल का नाम लिखें। भंडार के प्रश्न में, प्रति व्यक्ति दैनिक मात्रा अपरिवर्तित हो तो यह व्यक्ति-दिन हो सकता है। निश्चित कार्य के प्रश्न में, समान स्थिर कार्य-दर की शर्त पर यह श्रमिक-घंटे हो सकता है। इन नामों में से कोई भी लोगों के बारे में बिना शर्त लागू नियम नहीं है।

गणितीय आधार: NCERT गणित प्रकाश कक्षा 8 भाग II, अध्याय 3, §3.6, मुद्रित पृ.63-65, तथा NCERT कक्षा VIII गणित, अध्याय 11, §11.3, मुद्रित पृ.137-140। संबंध लगाने से पहले हम मॉडल की शर्तें स्पष्ट बताते हैं।

हल उदाहरण 4: हर युग्म का गुणनफल लें

दिए गए व्युत्क्रम मॉडल में $(x, y) = (3, 24), (4, 18), (6, 12)$ हैं। $x = 9$ पर y निकालें।

अपरिवर्ती संबंध: $xy = 3 \times 24 = 4 \times 18 = 6 \times 12 = 72$ । तीनों दिए गुणनफल बराबर हैं। $x = 9$ पर $9 \times y = 72$ चाहिए, इसलिए $y = 72/9 = 8$ ।

गुणक विधि से भी यही उत्तर मिलता है: x , 3 से 9 होता है, यानी 3 से गुणा होता है। इसलिए y , 24 से $24/3 = 8$ होता है। y को 3 से गुणा करने पर गुणनफल स्थिर रहने के बजाय बदल जाएगा।

औचित्य-जाँच: x को 6 से 9 बढ़ाने पर y को 12 से कम होना चाहिए; 8 कम है। मान रखने पर $9 \times 8 = 72$ । मॉडल प्रश्न में दिया है; केवल तीन पंक्तियाँ मिल जाने से दिए आँकड़ों के बाहर कोई अज्ञात नियम सिद्ध नहीं होगा।

हल उदाहरण 5: पहले कार्य की शर्तें बताएँ

छह श्रमिक एक निश्चित काम 12 घंटे में पूरा करते हैं। उसी काम में नौ श्रमिक कितना समय लेंगे?

आवश्यक शर्तें: सभी श्रमिकों की कार्य-दर समान और स्थिर है; वे पूरी अवधि साथ काम करते हैं; काम इस तरह बाँटा जा सकता है कि वे एक-दूसरे के काम में बाधा न डालें; तैयारी, समन्वय, विराम या किसी अन्य कारण से अतिरिक्त विलंब नहीं है। काम की मात्रा नहीं बदलती। ये इस प्रश्न की शर्तें हैं, हर कार्यस्थल के बारे में दावे नहीं।

एक श्रमिक एक घंटे में एक श्रमिक-घंटे का योगदान देता है। उत्पादकता समान और स्थिर होने से 6 श्रमिक × 12 घंटे, आवश्यक काम के 72 श्रमिक-घंटे देते हैं। नौ ऐसे श्रमिक हर घंटे 9 श्रमिक-घंटे देते हैं।

अपरिवर्ती संबंध: इस निश्चित काम के लिए श्रमिक × घंटे = 72 श्रमिक-घंटे। इसलिए $9 \times t = 72$, जिससे $t = 8$ घंटे। गुणक-जाँच: श्रमिकों की संख्या $9/6 = 3/2$ से गुणा होती है, इसलिए समय $2/3$ से गुणा होगा: $12 \times 2/3 = 8$ घंटे।

औचित्य-जाँच: अधिक समान श्रमिकों को 12 घंटे से कम लगने चाहिए। साथ ही $9 \times 8 = 6 \times 12$, इसलिए आवश्यक कार्य नहीं बदला। 72 का मान श्रमिक-घंटों में कुल है, पूरे समूह का बीता समय नहीं। कार्य-दर अलग होने या स्थिर तैयारी-विलंब होने पर पूरे समय की यह व्युत्क्रम गणना उचित नहीं होगी।

हल उदाहरण 6: भंडार के साथ दैनिक उपयोग भी स्थिर रखें

एक निश्चित खाद्य भंडार 24 लोगों के लिए 15 दिन चलता है। हर व्यक्ति की दैनिक खपत समान है और दोनों स्थितियों में यह मात्रा नहीं बदलती। नई आपूर्ति, बर्बादी या हानि नहीं होती। वही भंडार 30 लोगों को कितने दिन चलेगा?

एक व्यक्ति के एक दिन के राशन को भंडार की एक इकाई मानें। उपलब्ध भंडार में $24 \times 15 = 360$ ऐसे दैनिक राशन हैं। यदि 30 लोग एक-एक दैनिक राशन लें, तो प्रतिदिन 30 राशन खर्च होंगे।

अपरिवर्ती संबंध: व्यक्ति $\times$ दिन = 360 व्यक्ति-दिन, क्योंकि भंडार और प्रति व्यक्ति दैनिक मात्रा, दोनों स्थिर हैं। अवधि = $360/30 = 12$ दिन। दूसरे ढंग से, लोगों की संख्या $30/24 = 5/4$ से गुणा हुई है, इसलिए अवधि $4/5$ से गुणा होगी: $15 \times 4/5 = 12$ ।

औचित्य-जाँच: अधिक लोग भंडार जल्दी उपयोग करेंगे, इसलिए 12, 15 से कम होना चाहिए। मान रखने पर $30 \times 12 = 24 \times 15 = 360$ । यदि हर व्यक्ति प्रतिदिन खाने की मात्रा बदल दे, तो समान भंडार से यही व्यक्ति-दिन गुणनफल नहीं मिलेगा। केवल हर समूह के भीतर दैनिक उपयोग बराबर होना पर्याप्त नहीं; दोनों समूहों के बीच भी प्रति व्यक्ति दैनिक उपयोग अपरिवर्तित रहना चाहिए।

4 स्थिर संबंध से विधि चुनें

समय वाला हर प्रश्न व्युत्क्रम और रुपये वाला हर प्रश्न प्रत्यक्ष नहीं होता। स्थिर चाल पर दूरी/समय स्थिर है, इसलिए दूरी और समय प्रत्यक्ष हैं। क्षमता की बताई शर्तों के अंतर्गत निश्चित काम में श्रमिक $\times$ समय स्थिर है, इसलिए श्रमिकों की संख्या और समय व्युत्क्रम हैं। पूछें कि कौन-सी दो राशियाँ बदल रही हैं और कौन-सा संबंध स्थिर रखा गया है।

हल उदाहरण 7: चित्र के लिए फिर प्रत्यक्ष मॉडल चुनें

1:25,000 पैमाने वाले चित्र में दो बिंदु 3.6 cm दूर हैं। दर्शाई गई धरातलीय दूरी मीटर में निकालें। $100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$ लें।

पैमाने का अर्थ है चित्र की लंबाई:दर्शाई गई धरातलीय लंबाई = 1:25,000, जब इकाइयाँ समान हों। इसलिए चित्र का 1 cm धरातल के 25,000 cm दर्शाता है। दोनों लंबाइयाँ साथ बदलती हैं और पैमाना स्थिर रहता है।

अपरिवर्ती संबंध: दोनों लंबाइयाँ एक ही इकाई में लिखने पर धरातलीय लंबाई/चित्र की लंबाई = 25,000। सेंटीमीटर से सेंटीमीटर कटने के कारण यह भागफल इकाई-रहित है। धरातलीय दूरी = $3.6 \times 25,000 = 90,000 \text{ cm}$ । उत्तर की इकाई बदलें: $90,000/100 = 900 \text{ m}$ ।

औचित्य-जाँच: चित्र का 1 cm, 250 m दर्शाता है; इसलिए 3.6 cm को $3.6 \times 250 = 900 \text{ m}$ दर्शाना चाहिए। यह चित्र के 3 cm से मिलने वाले 750 m और 4 cm से मिलने वाले 1,000 m के बीच है। अनुपात की जाँच $3.6:90,000 = 1:25,000$ से होगी; $3.6:900$ लेने पर सेंटीमीटर की सीधे मीटर से गलत तुलना होगी। यह चित्र में दर्शाई गई दूरी है; इससे सड़क के रास्ते की लंबाई नहीं निकाली गई है।

पैमाने का आधार: [NCERT गणित प्रकाश, कक्षा 8 भाग II, अध्याय 3, §3.2, मुद्रित पृ.56-57](#)। गणना सही होने पर भी दर्शाई गई धरातलीय दूरी और सड़क की दूरी का अंतर महत्वपूर्ण है।

हल उदाहरण 8: दो आकर्षक गलत नियमों को परखें

दावा A: ₹40 तथा प्रति किलोमीटर ₹12 का कुल शुल्क, तय की गई धन दूरी के प्रत्यक्ष समानुपात में है।

स्थिर क्या है: ₹40 शुरुआती शुल्क और हर किलोमीटर पर जुड़ने वाले ₹12। इससे यह नहीं कहा जा सकता कि कुल शुल्क प्रति किलोमीटर स्थिर है। 1 km पर कुल ₹52 और 2 km पर कुल ₹64 है। प्रस्तावित अपरिवर्ती संबंध की जाँच: शुल्क/दूरी पहले $52/1 = ₹52$ प्रति km है, लेकिन फिर $64/2 = ₹32$ प्रति km है। यह बदलता है, इसलिए कुल शुल्क और दूरी प्रत्यक्ष समानुपाती नहीं हैं। सही शुल्क-संबंध $C = 40 + 12d$ है, जहाँ C रुपये में और d किलोमीटर में है। दूरी वाला हिस्सा $C - 40 = 12d$ प्रत्यक्ष है, लेकिन प्रश्न पूरे शुल्क C के बारे में है। एक वैध जोड़-आधारित मॉडल गणना की गलती नहीं है। औचित्य-जाँच: 1 km को दुगुना करके 2 km करने पर ₹52 दुगुना होकर ₹104 नहीं होता; वास्तविक शुल्क ₹64 है। केवल दूरी वाला शुल्क दुगुना होता है; शुरुआती शुल्क एक बार ही लगता है।

दावा B: युग्म (2, 10), (3, 9), (4, 8) व्युत्क्रम हैं, क्योंकि x बढ़ने पर y घटता है।

प्रस्तावित अपरिवर्ती संबंध की जाँच: $xy = 2 \times 10 = 20$; $3 \times 9 = 27$; $4 \times 8 = 32$ । गुणनफल बदलता है, इसलिए ये आँकड़े व्युत्क्रम नहीं हैं। वे प्रत्यक्ष भी नहीं हैं: y/x के मान 5, 3 और 2 हैं। यहाँ $x + y = 12$ स्थिर है; इससे दिखता है कि स्थिर योग के कारण भी एक राशि बढ़ने पर दूसरी घट सकती है। औचित्य-जाँच: x को 2 से 4 करने पर व्युत्क्रम मॉडल में y, 10 से आधा होकर 5 होना चाहिए। दिया $y = 8$ है, इसलिए गुणक-जाँच भी दावे को गलत ठहराती है। प्रस्तावित अपरिवर्ती संबंध जाँचते समय हर दी हुई पंक्ति महत्वपूर्ण है।

दोनों दावे गलत हैं। दिशा अंतिम जाँच में उपयोगी है, लेकिन निर्णय स्थिर भागफल या गुणनफल से होगा। प्रत्यक्ष समानुपात वाली सावधानी का आधार [NCERT कक्षा VIII गणित, अध्याय 11, §11.2, मुद्रित पृ.131-132](#) है; शुल्क और घटती सारणी के ये प्रतिउदाहरण हमारे अपने हैं।

जाँच-बिंदु B: चुनें, निकालें और दावे की सीमा बताएँ

त्वरित संदर्भ देखे बिना प्रयास करें।

1. धन राशियों के व्युत्क्रम मॉडल में x को $5/4$ से गुणा किया जाता है। y को किस गुणक से गुणा करेंगे?
2. उसी निश्चित काम में केवल “श्रमिक अधिक हैं” जानना, नया समय व्युत्क्रम समानुपात से निकालने के लिए पर्याप्त क्यों नहीं है?
3. धन मानों की सारणी में युग्म (2, 15), (3, 10), (5, 6) हैं। क्या पंक्तियाँ व्युत्क्रम समानुपात में हैं? क्या सारणी अकेले सिद्ध करती है कि कोई अज्ञात प्रक्रिया हर x पर इसी नियम का पालन करेगी?
4. एक भंडार 10 लोगों को 18 दिन चलता है। हर व्यक्ति का दैनिक उपयोग समान और अपरिवर्तित है; नई आपूर्ति या हानि नहीं होती। 15 लोगों को कितने दिन चलेगा?

प्रतिक्रिया:

1. गुणक $4/5$ है। दोनों गुणकों का गुणनफल 1 होने से xy नहीं बदलता।
2. श्रमिकों की दर समान और स्थिर होनी चाहिए; वे बिना बाधा उसी निश्चित काम को बाँट सकें और तैयारी या समन्वय से अतिरिक्त विलंब न हो। अलग दर या अतिरिक्त विलंब होने पर श्रमिक $\times$ कुल बीता समय स्थिर नहीं रह सकता।
3. हाँ, दिए गुणनफल सभी 30 हैं। नहीं, कुछ पंक्तियों के मिलने से अज्ञात प्रक्रिया के अन्य मानों का नियम सिद्ध नहीं होता। सारणी के बाहर अनुमान के लिए मॉडल या उसे उचित ठहराने वाली शर्त चाहिए।
4. अपरिवर्ती गुणनफल $10 \times 18 = 180$ व्यक्ति-दिन है। अवधि $= 180/15 = 12$ दिन; $15 \times 12 = 180$ । इन शर्तों में अधिक लोगों के लिए दिन कम होंगे।

केवल दिशा से मॉडल चुना हो तो उदाहरण 8 दोहराएँ। गुणनफल सही था, लेकिन कहानी की शर्तें छूट गईं, तो उदाहरण 5-6 दोहराएँ। चित्र की दूरी का उत्तर 100 गुना बड़ा या छोटा हो तो उदाहरण 7 दोहराएँ और रूपांतरण अलग चरण में लिखें।

5 स्वतंत्र अभ्यास

कुंजी पढ़ने से पहले सभी बारह प्रश्न हल करें। एक विकल्प चुनें और उसका अपरिवर्ती संबंध या मॉडल को गलत ठहराने वाली जाँच लिखें। यह बिना समय-सीमा का सीखने वाला अभ्यास है: प्रत्येक प्रश्न का 1 अंक, ऋणात्मक अंक 0 और उत्तीर्ण होने की कोई सीमा नहीं। यह पूर्ण RRB CBT का अनुकरण नहीं है।

1. दिए गए प्रत्यक्ष मॉडल में $x = 3$ पर $y = 21$ है। $x = 8$ पर y क्या है?

- | | |
|--------|-----------|
| A. 26 | B. 56 |
| C. 168 | D. $63/8$ |

2. धन राशियों के व्युत्क्रम मॉडल में $x = 4$ और $y = 27$ है। स्थिर गुणनफल k क्या है?

- | | |
|-----------|-------|
| A. $27/4$ | B. 31 |
| C. 108 | D. 23 |

3. स्थिर इकाई कीमत पर तीन समान कॉपियाँ ₹81 की हैं। कोई शुल्क या मात्रा-आधारित छूट नहीं है। पाँच की कीमत क्या है?

- | | |
|-----------|---------|
| A. ₹48.60 | B. ₹83 |
| C. ₹405 | D. ₹135 |

4. धन राशियों के व्युत्क्रम मॉडल में x दुगुना होता है। y को किस गुणक से गुणा किया जाता है?

- | | |
|----------|------|
| A. $1/2$ | B. 2 |
| C. -2 | D. 1 |

5. निश्चित 2,400 लेबल पहले हर पूरे डिब्बे में 30 लेबल रखकर पैक किए गए हैं। उसी खेप को हर पूरे डिब्बे में 40 लेबल रखकर, बिना कुछ बचाए, फिर पैक करें तो कितने डिब्बे चाहिए?

- | | |
|----------------------|-------|
| A. 80 | B. 60 |
| C. $106 \frac{2}{3}$ | D. 70 |

6. एक कॉपियर बिना शुरुआती विलंब या रुकावट के स्थिर दर से छापता है। वह 3 मिनट में 84 पृष्ठ छापता है। 2.5 मिनट में कितने पृष्ठ छापेगा?

- | | |
|---------------------------|----------------|
| A. $58 \frac{1}{3}$ पृष्ठ | B. 56 पृष्ठ |
| C. 70 पृष्ठ | D. 100.8 पृष्ठ |

7. आठ समान मशीनें, प्रत्येक समान स्थिर दर पर काम करके, एक निश्चित खेप 15 घंटे में बनाती हैं। काम बिना बाधा बाँटा जाता है; तैयारी, रुकावट या समन्वय से अतिरिक्त विलंब नहीं है। उन्हीं शर्तों में साथ काम करने वाली 12 ऐसी मशीनों को उसी खेप के लिए कितना समय चाहिए?

- A. 10 घंटे
B. 22.5 घंटे
C. 11 घंटे
D. 120 घंटे

8. एक चित्र का पैमाना 1:40,000 है। उस पर दो बिंदु 2.8 cm दूर हैं। दर्शाई गई धरातलीय दूरी मीटर में क्या है? 100 cm = 1 m लें।

- A. 112,000 m
B. 112 m
C. 1.12 m
D. 1,120 m

9. निश्चित सामग्री 18 लोगों को 20 दिन चलती है। हर व्यक्ति की दैनिक उपयोग-मात्रा समान है और दोनों स्थितियों में नहीं बदलती; नई आपूर्ति या हानि नहीं होती। वही सामग्री 24 लोगों को कितने दिन चलेगी?

- A. 26 $\frac{2}{3}$ दिन
B. 15 दिन
C. 14 दिन
D. 360 दिन

10. किराया स्थिर ₹35 तथा हर किलोमीटर के ₹9 है। क्या कुल किराया धन दूरी के प्रत्यक्ष समानुपात में है? सही निर्णय और कारण चुनें।

- A. हाँ; हर किलोमीटर पर जुड़ने वाला शुल्क ₹9 है
B. हाँ; किराया और दूरी, दोनों बढ़ते हैं
C. नहीं; 1 km और 2 km पर कुल किराया/दूरी ₹44/km और ₹26.50/km है
D. नहीं; किराया और दूरी व्युत्क्रम हैं, इसलिए अधिक दूरी का किराया कम होगा

11. दिए युग्म $(x, y) = (2, 18), (3, 15), (6, 6)$ हैं। x बढ़ने पर y घटता है, इसलिए विद्यार्थी इन्हें व्युत्क्रम कहता है। कौन-सी जाँच सही है?

- A. वे व्युत्क्रम हैं, क्योंकि y घटता है
B. वे व्युत्क्रम हैं, क्योंकि पहले और अंतिम गुणनफल दोनों 36 हैं
C. वे प्रत्यक्ष हैं, क्योंकि हर y/x का मान 9 है
D. वे व्युत्क्रम नहीं हैं, क्योंकि गुणनफल 36, 45 और 36 हैं

12. पाँच श्रमिक एक निश्चित काम 18 घंटे में करते हैं। वही काम करने वाले नौ श्रमिकों का समय निकालने के लिए मानें कि सभी की दर समान और स्थिर है, सभी साथ काम करते हैं तथा काम बिना बाधा, तैयारी-विलंब या समन्वय-विलंब के बाँटा जा सकता है। कौन-सा निष्कर्ष गणना और उसकी शर्तों, दोनों का पालन करता है?

- A. दी गई शर्तों में 10 घंटे; उनके बिना यह अनुमान लागू होना आवश्यक नहीं
- B. किन्हीं भी नौ श्रमिकों के लिए 10 घंटे, चाहे उनकी दरें या विलंब अलग हों
- C. दी गई शर्तों में 32.4 घंटे, क्योंकि श्रमिक बढ़ने पर समय बढ़ता है
- D. 14 घंटे, क्योंकि चार श्रमिक जोड़ने पर चार घंटे घटते हैं

6 व्याख्या सहित उत्तर-कुंजी

1. B सही है: अपरिवर्ती भागफल $y/x = 21/3 = 7$ है, इसलिए $y = 7 \times 8 = 56$ । जाँच: $56/8 = 7$ । A में x का अंतर $8 - 3 = 5$, 21 में जोड़ा गया है; समान जोड़ से यह दर स्थिर नहीं रहती। C में पुराने $x = 3$ से भाग दिए बिना 21 को 8 से गुणा किया गया है। D में व्युत्क्रम गुणक से $21 \times 3/8 = 63/8$ निकाला गया है; इस प्रत्यक्ष मॉडल में x बढ़ने पर y को घटाना गलत है।

2. C सही है: व्युत्क्रम समानुपात में xy स्थिर है, इसलिए $k = 4 \times 27 = 108$ । $y = k/x$ में रखने पर $108/4 = 27$ । A में y/x निकाला गया है, जो प्रत्यक्ष मॉडल की जाँच का भागफल है; माँगा गया गुणनफल नहीं। B में $4 + 27 = 31$ जोड़ा गया है; व्युत्क्रम मॉडल में यह योग सामान्यतः स्थिर नहीं रहता। D में $27 - 4 = 23$ घटाया गया है; स्थिर अंतर व्युत्क्रम का अपरिवर्ती संबंध नहीं है।

3. D सही है: एक कॉपी $81/3 = ₹27$ की है, इसलिए पाँच $5 \times 27 = ₹135$ की होंगी। अपरिवर्ती दर कीमत/कॉपियों की संख्या = ₹27 प्रति कॉपी है। A में व्युत्क्रम गणना $81 \times 3/5 = 48.60$ से अधिक कॉपियों की कीमत कम कर दी गई है। B में दो अतिरिक्त कॉपियों को रुपये की राशि में $81 + 2$ की तरह जोड़ा गया है; संख्या और रुपये मिला दिए गए हैं। C में $81 \times 5 = 405$ से तीन कॉपियों की कीमत को एक की कीमत मान लिया गया है।

4. A सही है: $(2x) \times (y/2) = xy$, इसलिए गुणक $1/2$ है। B में y भी दुगुना करके गुणनफल चार गुना हो जाता है। C में धन y ऋण हो जाएगा; -2 से गुणा करना न आधा करना है, न 2 घटाना। केवल 2 घटाने से भी गुणनफल सामान्यतः स्थिर नहीं रहेगा। D में y नहीं बदलता, जिससे xy स्थिर रहने के बजाय दुगुना होगा।

5. B सही है: प्रति डिब्बा लेबल $\times$ डिब्बे = 2,400, इसलिए डिब्बे = $2,400/40 = 60$ । पहले $2,400/30 = 80$ डिब्बे थे; व्युत्क्रम गुणक से $80 \times 30/40 = 60$ । A में पैकिंग बढ़ने पर भी पुराने 80 डिब्बे रखे गए हैं। C में प्रत्यक्ष गुणक से $80 \times 40/30 = 106\frac{2}{3}$ निकाला गया है; कुल स्थिर नहीं रहता और यहाँ पूरे डिब्बों की संख्या भी इतनी नहीं हो सकती। D में प्रति डिब्बा वृद्धि $40 - 30 = 10$ को 80 से घटाया गया है; 70 डिब्बों में 40-40 लेबल रखने पर 2,800 होंगे, 2,400 नहीं।

6. C सही है: दर $84/3 = 28$ पृष्ठ प्रति मिनट है, इसलिए $28 \times 2.5 = 70$ पृष्ठ। जाँच: कम समय में 84 से कम पृष्ठ मिलते हैं और $70/2.5 = 28$ । A में 2.5 मिनट को 2 मिनट 5 सेकंड समझा गया है: $84 \times 125/180 = 58\frac{1}{3}$ । वास्तव में 2.5 मिनट, 150 सेकंड या 2 मिनट 30 सेकंड है। B में केवल 2 मिनट गिने गए और आधा मिनट छोड़ा गया है। D में व्युत्क्रम गणना $84 \times 3/2.5 = 100.8$ की गई है, जबकि स्थिर दर पर उत्पादन और समय प्रत्यक्ष हैं।

7. A सही है: निश्चित खेप के लिए $8 \times 15 = 120$ मशीन-घंटे चाहिए, इसलिए $12t = 120$ और $t = 10$ घंटे। जाँच: $12 \times 10 = 120$ और अधिक समान मशीनों को कम समय लगता है। B में प्रत्यक्ष गुणक $15 \times 12/8 = 22.5$ से समय बढ़ा दिया गया है। C में चार अतिरिक्त मशीनों की संख्या 15 घंटों से घटाई गई है; अलग राशियाँ मिलती हैं और $12 \times 11 = 132$ से भी जाँच असफल है। D में कुल 120 मशीन-घंटों को पूरे समूह के बीते घंटे मान लिया गया है; बीता समय पाने के लिए 12 मशीनों से भाग दें।

8. D सही है: पैमाना समान लंबाई-इकाइयों की तुलना करता है, इसलिए धरातलीय दूरी = $2.8 \times 40,000 = 112,000$ cm = 1,120 m। जाँच: चित्र का एक सेंटीमीटर 400 m दर्शाता है; $2.8 \times 400 = 1,120$ । A में 100 से भाग दिए बिना सेंटीमीटर के मान पर मीटर लिख दिया गया है। B में सेंटीमीटर के मान को 100 के बजाय 1,000 से भाग दिया गया है। C में किलोमीटर में बदलकर 1.12 मिला, लेकिन इकाई मीटर लिख दी गई है। इस दर्शाई गई दूरी से अपने-आप सड़क के रास्ते की लंबाई नहीं मिलती।

9. B सही है: प्रति व्यक्ति दैनिक मात्रा अपरिवर्तित होने से अपरिवर्ती गुणनफल व्यक्ति $\times$ दिन = $18 \times 20 = 360$ व्यक्ति-दिन है। इसलिए दिन = $360/24 = 15$ और $24 \times 15 = 360$ । A में प्रत्यक्ष गुणक $20 \times 24/18 = 26 \frac{2}{3}$ से अधिक लोगों के लिए भंडार अधिक दिन चला दिया गया है। C में छह अतिरिक्त लोगों की संख्या 20 दिनों से घटाकर इकाइयाँ मिलाई गई हैं; $24 \times 14 = 336$, 360 नहीं। D में 24 लोगों से भाग दिए बिना कुल 360 व्यक्ति-दिन को बीते दिन बता दिया गया है।

10. C सही है: $F = 35 + 9d$ से 1 km पर $F = ₹44$ और 2 km पर ₹53। इसलिए F/d , 44 से 26.50 रुपये प्रति km हो जाता है; संबंध प्रत्यक्ष नहीं है। A में स्थिर अतिरिक्त दर ₹9/km को औसत कुल किराया प्रति किलोमीटर मान लिया गया है, जिसमें स्थिर ₹35 भी शामिल हैं। B में केवल दिशा देखी गई है, जो पर्याप्त जाँच नहीं है। D की शुरुआत में 'नहीं' सही है, लेकिन संबंध को व्युत्क्रम कहना गलत है: किराया बढ़ता है और गुणनफल $1 \times 44 = 44$ तथा $2 \times 53 = 106$ अलग हैं। केवल $F - 35$, दूरी के प्रत्यक्ष समानुपात में है।

11. D सही है: $2 \times 18 = 36$, $3 \times 15 = 45$ और $6 \times 6 = 36$ । एक भी असंगत पंक्ति दिए आँकड़ों के लिए स्थिर-गुणनफल मॉडल को गलत ठहराती है। A में केवल दिशा जाँची गई है, गुणनफल नहीं। B में बीच की पंक्ति छोड़ दी गई है; सिरों के मिलने से विरोध मिट नहीं जाता। C में भागफल गलत निकाले गए हैं: $18/2 = 9$, $15/3 = 5$ और $6/6 = 1$, इसलिए सारणी प्रत्यक्ष भी नहीं है।

12. A सही है: दी गई शर्तों में निश्चित काम के लिए $5 \times 18 = 90$ श्रमिक-घंटे चाहिए। नौ ऐसे श्रमिक $90/9 = 10$ घंटे लेंगे और $9 \times 10 = 5 \times 18$ । B का संख्यात्मक उत्तर समान है, लेकिन उसे असमान दरों या अतिरिक्त विलंब पर भी लागू कहना गलत है; तब केवल श्रमिकों की संख्या से स्थिर गुणनफल सिद्ध नहीं होता। C में व्युत्क्रम गुणक के बजाय प्रत्यक्ष गुणक $18 \times 9/5 = 32.4$ लगाया गया है। D में अंतर से $18 - 4 = 14$ निकाला गया है; $9 \times 14 = 126$ श्रमिक-घंटे, 90 से नहीं मिलते।

7 अपनी गलतियों से दोहराने का विषय चुनें

- प्रश्न 1, 3, 6: इकाई दर और ऐकिक विधि के लिए खंड A दोहराएँ
- प्रश्न 2, 4, 5: स्थिर गुणनफल और उलटे गुणक के लिए खंड B का आरंभ दोहराएँ
- प्रश्न 7, 9, 12: स्थिर कार्य/भंडार और दर की शर्तों के लिए उदाहरण 5-6 दोहराएँ
- प्रश्न 8: समान लंबाई-इकाइयों और पैमाने के लिए उदाहरण 7 दोहराएँ
- प्रश्न 10-11: दिशा के बजाय हर भागफल/गुणनफल जाँचने के लिए उदाहरण 8 दोहराएँ

दोहराने के बाद संबंधित प्रश्न बिना कुंजी देखे फिर करें और समझाएँ कि बाकी तीन विकल्प क्यों गलत हैं।

स्रोत और इस पाठ की सीमा

RRB की आधिकारिक गणित विषय-सूची में Ratio and Proportion है: [RRB CEN 09/2025, §14.1, मुद्रित पृ.28](#)। यह विषय-सीमा का आधार है; इससे प्रश्नों की आवृत्ति या भविष्य की परीक्षा का अनुमान नहीं लगाया गया है।

प्रत्यक्ष और व्युत्क्रम संबंधों का गणितीय आधार NCERT कक्षा VIII गणित, अध्याय 11 के §11.2 पृ.129-137 तथा §11.3 पृ.137-143 और NCERT गणित प्रकाश, कक्षा 8 भाग II, अध्याय 3 के §3.6 पृ.63-65 में है। पैमाने के लिए NCERT गणित प्रकाश, कक्षा 8 भाग II, अध्याय 3 §3.2 पृ.56-57 देखें। उद्धृत अवधारणाओं पर इस पाठ की सभी व्याख्याएँ, उदाहरण, प्रश्न और प्रतिउदाहरण स्वतंत्र रूप से लिखे गए हैं; किसी पुस्तक का प्रश्न या स्कैन नहीं लिया गया। समान स्थिर कार्य-दर, निश्चित कार्य, अपरिवर्तित प्रति व्यक्ति दैनिक उपयोग तथा अतिरिक्त विलंब न होने की शर्तें हमारे मॉडल में स्पष्ट रखी गई हैं। असमान श्रमिकों की संयुक्त दर, पाइप, सापेक्ष चाल और कई बदलती राशियों के संयुक्त समानुपात इस पाठ की सीमा से बाहर हैं।

उपमा

कल्पना करें कि समान आयताकार कार्ड एक कतार में समतल रखे हैं; न बीच में खाली जगह है, न एक कार्ड दूसरे पर चढ़ा है। हर कार्ड 6 cm चौड़ा हो तो दुगुने कार्डों की कुल चौड़ाई दुगुनी होगी। प्रति कार्ड स्थिर चौड़ाई एक भागफल है: कुल चौड़ाई/कार्डों की संख्या = 6 cm प्रति कार्ड। यह प्रत्यक्ष संबंध का चित्र है।

अब एक 60 cm रिबन स्थिर रखें और बिना सामग्री खोए उसे बराबर टुकड़ों में काटें। अधिक बराबर टुकड़ों की लंबाई कम होगी: 5 टुकड़े 12-12 cm के हैं, जबकि 10 टुकड़े 6-6 cm के हैं। टुकड़ों की संख्या $\times$ प्रति टुकड़ा लंबाई = 60 cm स्थिर रहता है। यह व्युत्क्रम संबंध का चित्र है, क्योंकि पूरा रिबन स्थिर है, टुकड़े की लंबाई नहीं।

दोनों चित्रों में उपयोगी प्रश्न है: “हम क्या अपरिवर्तित रख रहे हैं?” चित्रों की सीमाएँ भी हैं: असमान कार्ड, बीच की जगह, रिबन के असमान टुकड़े या कटाई की हानि संबंध बदल देंगे। इनसे यह भी सिद्ध नहीं होता कि श्रमिकों का हर बड़ा समूह उसी अनुपात में तेज होगा; उसके लिए समान दर और अतिरिक्त विलंब न होने की अलग शर्त चाहिए। चित्र अपरिवर्ती संबंध का नाम पहचानने में मदद करता है, लेकिन कहानी की शर्तें जाँचना फिर भी आवश्यक है।

त्वरित संदर्भ

गणना से पहले चुनें

1. बदलती हुई दो राशियों के नाम और स्थिर रहने वाला संबंध लिखें।
2. एक ही राशि के दोनों मान एक ही इकाई में रखें।
3. अपरिवर्ती संबंध जाँचें, फिर गणना करें; उत्तर वापस रखकर उसकी दिशा जाँचें।

प्रत्यक्ष समानुपात: भागफल समान

- $y/x = k$; $y = kx$, यहाँ उपयोग किए धन मानों के लिए
- $y_2 = y_1 \times (x_2/x_1)$: x को f से गुणा करें तो y भी f से गुणा होता है
- ऐकिक विधि: पुराना $y \div$ पुराना x , फिर नए x से गुणा
- सामान्य शर्त: बिना शुल्क/छूट की अपरिवर्तित इकाई कीमत, या बिना शुरुआती विलंब की अपरिवर्तित उत्पादन दर
- दर की इकाइयाँ रखें: ₹/kg, पृष्ठ/मिनट, km/घंटा

व्युत्क्रम समानुपात: गुणनफल समान

- $xy = k$; $y = k/x$; x और y धन हैं तथा $x \neq 0$
- $y_2 = y_1 \times (x_1/x_2)$: x को f से गुणा करें तो y को $1/f$ से गुणा करते हैं
- निश्चित कार्य: श्रमिक $\times$ समय तभी, जब श्रमिक समान स्थिर दर वाले हों, वही काम बाँटा जा सके और बाधा या अतिरिक्त विलंब न हो
- निश्चित भंडार: व्यक्ति $\times$ दिन तभी, जब हर व्यक्ति का समान दैनिक उपयोग दोनों स्थितियों में अपरिवर्तित हो तथा नई आपूर्ति/हानि न हो
- निश्चित पैकिंग: प्रति पूरे डिब्बे की वस्तुएँ $\times$ डिब्बों की संख्या = कुल वस्तुएँ; पूरे डिब्बों की व्यावहारिक शर्त भी जाँचें

इकाइयाँ और भ्रम

- 1 घंटा = 60 मिनट; 2.5 मिनट = 2 मिनट 30 सेकंड
- 1 m = 100 cm; 1 km = 1,000 m = 100,000 cm
- पैमाना 1:n का अर्थ, समान इकाइयों में चित्र की लंबाई:दर्शाई गई धरातलीय लंबाई = 1:n; चित्र की लंबाई को n से गुणा करें, फिर उत्तर की इकाई बदलें
- चित्र की दूरी दर्शाई गई धरातलीय दूरी है, मान ली गई सड़क-मार्ग की लंबाई नहीं
- दोनों का बढ़ना प्रत्यक्ष और विपरीत दिशा में बदलना व्युत्क्रम सिद्ध नहीं करता
- कुल कीमत में स्थिर शुल्क होने पर प्रत्यक्ष मॉडल सामान्यतः लागू नहीं होता: कुल कीमत/मात्रा जाँचें
- हर दी हुई पंक्ति जाँचें। सीमित पंक्तियों का मिलना अनुकूलता दिखाता है, सार्वभौमिक वास्तविक नियम नहीं
- न भागफल स्थिर हो, न गुणनफल, तो किसी भी मॉडल को जबरन न लगाएँ

गलती सुधारें

इकाई गलत: रूपांतरण फिर लिखें। दिशा गलत: चुना मॉडल फिर जाँचें। दिशा सही, मान गलत: वास्तविक भागफल/गुणनफल जाँचें। शर्तें गायब: संख्यात्मक अनुमान अभी उचित नहीं ठहराया गया है।