HCF LCM and Choosing the Right Model

महत्तम समापवर्तक लघुत्तम समापवर्त्य और सही विधि का चयन

Lesson 3 of 5 | Numbers and Calculation | Free bilingual workbook

5 में से पाठ 3 | संख्याएँ और गणना | निःशुल्क द्विभाषी कार्यपुस्तिका

Use the English or Hindi section. Read the explanations, show your own steps, then check the answers. This focused workbook is part of the five-lesson Numbers and Calculation module.

अंग्रेज़ी या हिंदी खंड पढ़ें। व्याख्या समझें, अपने चरण लिखें, फिर उत्तर जाँचें। यह केंद्रित कार्यपुस्तिका पाँच पाठों वाले संख्याएँ और गणना मॉड्यूल का हिस्सा है।

Choose your section / अपना खंड चुनें

English lesson and practice

English quick reference

हिंदी पाठ और अभ्यास

हिंदी त्वरित संदर्भ

Original learning practice. Untimed, with no negative marking or pass cutoff. This workbook is not a full RRB CBT simulation or the complete Mathematics course.

मौलिक अध्ययन अभ्यास। समय-सीमा, ऋणात्मक अंकन या उत्तीर्ण होने की न्यूनतम अंक-शर्त नहीं है। यह कार्यपुस्तिका पूरे आरआरबी सीबीटी का अनुकरण या गणित का पूरा पाठ्यक्रम नहीं है।

HCF LCM and Choosing the Right Model

What you will learn

Use exact divisibility to decide whether a problem needs a common factor or a common multiple. By the end you should be able to:

- Find the HCF and LCM of two or three positive integers and justify every prime power chosen
- Identify what the unknown quantity must divide, or what it must be divisible by
- Solve largest identical-kit and next-common-event problems with stated conditions
- Use and verify the product identity for two positive integers
- Reduce one specified-remainder problem to exact divisibility

This lesson follows Factors Divisibility and Prime Factorisation. All numbers for which we find HCF and LCM here are positive integers: 1, 2, 3, … . We do not apply these procedures to fractions, negative numbers or zero. HCF means highest common factor, also called greatest common divisor or GCD. LCM means least common multiple; we always mean the least positive common multiple.

1 Retrieve factors before choosing a method

Try these three short checks before reading the feedback.

1. Write 60 as a product of prime powers.

2. List the positive common factors of 8 and 12.

3. In 35 = 5 × 7, explain the relationship between 5 and 35.

Feedback:

1. $60 = 2^2 \times 3 \times 5$. Multiply back: 4 × 3 × 5 = 60. Every factor in the prime list is prime.

2. The factors of 8 are 1, 2, 4, 8; those of 12 are 1, 2, 3, 4, 6, 12. The common factors are 1, 2, 4.

3. 5 is a factor of 35 because 35 ÷ 5 = 7 with remainder 0. Equivalently, 35 is a multiple of 5 because 35 = 5 × 7.

If you listed multiples instead of factors, first complete the sentence “this number divides the given total exactly.” If a prime factorisation does not multiply back to the original number, repair it using the previous lesson. We now use that knowledge rather than repeat the divisibility tests.

2 Two different directions of divisibility

A common factor divides every given number exactly. The HCF is the greatest positive number with that property. Since 1 divides every positive integer, the HCF is at least 1. If no prime factor is shared by all the numbers, the HCF is 1, not 0.

A common multiple is divisible by every given number. The LCM is the smallest positive number with that property. Although 0 is divisible by every positive integer, it is excluded from our LCM definition. The product of the given numbers is a common multiple, but it may contain unnecessary repeated prime factors and need not be the least one.

Read the direction before calculating:

- HCF: each given number ÷ the answer must be a whole number
- LCM: the answer ÷ each given number must be a whole number

Worked example 1 Meaning through lists and prime factors

Find the HCF and LCM of 18 and 30.

The positive factors of 18 are 1, 2, 3, 6, 9, 18. The positive factors of 30 are 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Their common factors are 1, 2, 3, 6, so HCF = 6.

List positive multiples in increasing order:

- 18: 18, 36, 54, 72, 90, ...
- 30: 30, 60, 90, ...

The first meeting is 90, so LCM = 90.

Now use $18 = 2 \times 3^2$ and $30 = 2 \times 3 \times 5$. For a common factor we can take one 2 and one 3: both numbers contain them. A second 3 fails because 30 does not contain it, and 5 fails because 18 does not contain it. Thus HCF = 2 × 3 = 6.

For a common multiple we must provide one 2, two 3s and one 5, so that the requirements of both numbers are met. Those factors give LCM = $2 \times 3^2 \times 5 = 90$. There is no need to count the shared 2 and 3 twice.

Check: 18 ÷ 6 = 3 and 30 ÷ 6 = 5; 90 ÷ 18 = 5 and 90 ÷ 30 = 3. These checks confirm divisibility. The full lists or the prime-factor reasoning establish “greatest” and “least”. The product 18 × 30 = 540 is a common multiple, but it is not the LCM.

3 Why the exponent table works

A prime exponent records how many copies of that prime occur. In an exponent table, write 0 when the prime is absent. This means no copy is available or required from that number; its contribution to a product is 1.

For the HCF, a chosen prime power must fit inside every number. Its exponent cannot exceed any entry in that prime's column. The largest exponent that still fits is therefore the smallest column entry. Do this for every prime. A minimum of 0 means that prime is omitted. If all minima are zero, the HCF is 1.

For the LCM, the number we build must contain enough copies for every given number. Its exponent must reach the largest entry in each prime column. Choosing exactly that largest entry gives enough without adding unnecessary factors. Every common multiple must contain these required powers, so it is a multiple of the number built this way. That is why this construction gives the least positive common multiple.

The same reasoning works for two numbers or for three. We are not choosing the smaller or larger original number: we compare the exponents separately for each prime.

Worked example 2 A three-number exponent table

Find the HCF and LCM of 72, 90 and 120.

$72 = 2^3 \times 3^2$; $90 = 2 \times 3^2 \times 5$; $120 = 2^3 \times 3 \times 5$.

Number	Exponent of 2	Exponent of 3	Exponent of 5
72	3	2	0
90	1	2	1
120	3	1	1
Smallest in column	1	1	0
Largest in column	3	2	1

HCF = $2^1 \times 3^1 = 6$. The 5 is omitted because 72 contains no 5. LCM = $2^3 \times 3^2 \times 5 = 8 \times 9 \times 5 = 360$.

Check the factors: 72 ÷ 6 = 12; 90 ÷ 6 = 15; 120 ÷ 6 = 20. Check the multiples: 360 ÷ 72 = 5; 360 ÷ 90 = 4; 360 ÷ 120 = 3.

Error check: 30 is a common factor of 90 and 120, but it does not divide 72. “Common” must include every given number. Ignoring a zero entry changes the problem.

Two quick size checks help catch mistakes: the HCF cannot exceed the smallest given positive integer, and the LCM cannot be less than the largest. These checks can reject a wrong answer, but cannot by themselves prove that an answer is correct.

4 Let the unknown quantity choose the model

Before using either abbreviation, name the unknown and complete a divisibility sentence.

1. If the unknown must divide each given total exactly, it is a common factor. If the greatest such value is wanted, use HCF.

2. If the unknown must be divisible by every given size or interval, it is a common multiple. If the least positive such value is wanted, use LCM.

Do not choose by a single word such as “groups” or “maximum”. A greatest kit count divides the available totals. A least total that can be arranged into two specified group sizes must be divisible by those sizes. Also put measurements in the same unit before comparing them.

Worked example 3 The greatest number of identical kits

All 84 notebooks and 126 pens must be used to make the greatest possible number of identical kits, with nothing left over. Every kit must contain the same number of notebooks and the same number of pens. Find the number of kits and the contents of each.

Let the kit count be the unknown. It must divide both 84 and 126 exactly. We therefore need their HCF. $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ and $126 = 2 \times 3^2 \times 7$. HCF = 2 × 3 × 7 = 42 kits.

Each kit has 84 ÷ 42 = 2 notebooks and 126 ÷ 42 = 3 pens. Check: 42 × 2 = 84 and 42 × 3 = 126, so all items are used and every kit matches.

Error check: 42 is the number of kits, not the number of items in each kit. Fewer kits could contain more items each, but the question asks for the greatest kit count. The LCM does not divide the available totals and cannot answer that question.

Worked example 4 The next common event

Three signals sound at fixed intervals of 8, 12 and 18 seconds, without skipping any signal. They sound together now. After how many positive seconds will all three next sound together?

The unknown is elapsed time from now. For each signal to sound then, this time must contain a whole number of its intervals. We need the least positive common multiple of 8, 12 and 18. $8 = 2^3$; $12 = 2^2 \times 3$; $18 = 2 \times 3^2$. LCM = $2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$ seconds.

Check: 72 ÷ 8 = 9 intervals; 72 ÷ 12 = 6 intervals; 72 ÷ 18 = 4 intervals. The maximum prime-exponent requirements show that no smaller positive elapsed time works for all three.

Error check: 0 is the coincidence happening now, not the next one. Adding or averaging the intervals does not enforce divisibility by all three. The shared starting instant and fixed, unskipped intervals are essential conditions for this model.

5 A product identity for exactly two positive integers

For positive integers a and b: HCF(a, b) × LCM(a, b) = a × b.

Here is why. Focus on one prime. Suppose it occurs r times in a and s times in b. The HCF takes the smaller of r and s, and the LCM takes the larger. Between them they count r + s copies, exactly as the product a × b does. In symbols, min(r, s) + max(r, s) = r + s; “min” and “max” mean smaller and larger. This is true for every prime, including a prime absent from one number, whose count is 0. The two products therefore contain exactly the same prime factors.

For the pair 18 and 30, this gives 6 × 90 = 540 = 18 × 30. If the two numbers are co-prime, their HCF is 1 and their LCM equals their product. That conclusion depends on the HCF being 1; it is not a rule to multiply any two numbers to find their LCM.

Worked example 5 Find a missing number and verify it

Two positive integers have HCF 12 and LCM 180. One number is 36. Find the other.

Their product is 12 × 180 = 2160. Divide by the known number: Other number = 2160 ÷ 36 = 60.

Now verify both original conditions. $36 = 2^2 \times 3^2$ and $60 = 2^2 \times 3 \times 5$. Therefore HCF = $2^2 \times 3 = 12$ and LCM = $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$. Both match the question. The product formula produces a candidate; checking its HCF and LCM guards against inconsistent given data or arithmetic errors.

Do not extend the identity to three numbers. For 4, 6 and 8, HCF = 2 and LCM = 24. Their product is 4 × 6 × 8 = 192, whereas HCF × LCM = 2 × 24 = 48. With three prime counts, taking only the smallest and largest does not in general count all three.

6 A specified remainder changes what must divide exactly

For a positive divisor, division with remainder means: Dividend = divisor × whole-number quotient + remainder, with 0 ≤ remainder < divisor.

If two stated dividends leave the same specified remainder, subtract that remainder from each. The divisor must then divide both adjusted numbers exactly. In the type used below, both adjusted numbers are positive. When the greatest divisor is wanted, find their HCF, then check that the stated remainder is smaller than the candidate divisor and substitute back. Subtracting is a way to expose exact divisibility, not permission to ignore the remainder condition.

Worked example 6 The greatest divisor leaving remainder 2

Find the greatest positive integer that, when used to divide 98 and 146, leaves remainder 2 in each case.

1. Subtract the remainder: 98 − 2 = 96 and 146 − 2 = 144.

2. Any valid divisor must divide both 96 and 144. Factorise: $96 = 2^5 \times 3$ and $144 = 2^4 \times 3^2$.

3. HCF = $2^4 \times 3 = 16 \times 3 = 48$, so no valid divisor can exceed 48.

4. Verify the candidate: 98 = 48 × 2 + 2 and 146 = 48 × 3 + 2.

5. The remainder is valid because 0 ≤ 2 < 48. Thus 48 is the required greatest divisor.

Error check: HCF(98, 146) = 2 answers a different question about exact division. Dividing by 2 leaves remainder 0 here, and a remainder of 2 would be invalid with divisor 2. We have solved a greatest-divisor question; we have not introduced a general “LCM plus remainder” rule.

7 Independent practice

Attempt all twelve questions before reading the key. Choose one option and write the divisibility condition or calculation that supports it. This is untimed learning practice, with no negative marking or pass cutoff; it is not a full RRB CBT simulation.

1. What is the HCF of 24 and 40?

   A. 4
   B. 8
   C. 16
   D. 120

---

2. What is the LCM of 15 and 20?

   A. 5
   B. 30
   C. 60
   D. 300

---

3. What is the HCF of 18, 30 and 42?

   A. 6
   B. 3
   C. 18
   D. 126

---

4. What is the LCM of 6, 10 and 15?

   A. 1
   B. 15
   C. 60
   D. 30

---

5. Ropes of 96 cm and 144 cm are cut into pieces of the same positive whole-centimetre length, with no waste. What is the greatest possible piece length?

   A. 24 cm
   B. 48 cm
   C. 72 cm
   D. 288 cm

---

6. All 60 pencils and 84 erasers are to be used in the greatest possible number of identical kits. Each kit must have the same number of pencils and the same number of erasers. Which result is correct?

A. 6 kits; 10 pencils and 14 erasers each

B. 12 kits; 7 pencils and 5 erasers each

C. 12 kits; 5 pencils and 7 erasers each

D. 24 kits; 5 pencils and 7 erasers each

---

7. Two alarms sound at fixed intervals of 9 minutes and 15 minutes, without skipping any alarm. They sound together now. After how many positive minutes will they next sound together?

A. 45 minutes

B. 3 minutes

C. 24 minutes

D. 135 minutes

---

8. What is the least positive number of beads that can be packed with none left over either into groups of 12 or, as a separate choice, into groups of 18?

A. 6

B. 24

C. 216

D. 36

---

9. Two positive integers have HCF 6 and LCM 210. One integer is 30. What is the other integer?

A. 7

B. 36

C. 42

D. 70

---

10. What is the greatest positive integer that, when used to divide 111 and 147, leaves remainder 3 in each case?

A. 36

B. 3

C. 48

D. 108

---

11. A learner writes $24 = 2^3 \times 3$ and $36 = 2^2 \times 3^2$, then chooses the larger exponent of each prime and reports HCF = 72. Which correction is right?

A. 72 is the HCF because it uses all prime factors

B. 72 is the LCM; the HCF is 12

C. The HCF is 6 because repeated primes must be ignored

D. The HCF is 0 because the exponents differ

---

12. A learner claims that HCF × LCM always equals the product of three positive integers. Which calculation correctly disproves the claim?

A. For 4, 6, 8: HCF = 2, LCM = 96, and both products are 192

B. For 4, 6, 8: HCF = 4, LCM = 24, and both products are 96

C. For 4, 6, 8: HCF = 2, LCM = 24, and both products are 48

D. For 4, 6, 8: HCF × LCM = 2 × 24 = 48, but 4 × 6 × 8 = 192

---

8 Explained answer key

1. **B.** $24 = 2^3 \times 3$ and $40 = 2^3 \times 5$. The three copies of 2 are common to both, so HCF = $2^3 = 8$. Check: $24 \div 8 = 3$ and $40 \div 8 = 5$. The common factor 4 is not the greatest; 16 does not divide 24 or 40.

2. **C.** $15 = 3 \times 5$ and $20 = 2^2 \times 5$. The least common multiple needs 2^2, 3 and one copy of 5: $4 \times 3 \times 5 = 60$. Check: $60 \div 15 = 4$ and $60 \div 20 = 3$. Although 300 is also a common multiple, it is not the least.

3. **A.** $18 = 2 \times 3^2$, $30 = 2 \times 3 \times 5$ and $42 = 2 \times 3 \times 7$. Only one 2 and one 3 are available in every number, so HCF = $2 \times 3 = 6$. Check: $18 \div 6 = 3$, $30 \div 6 = 5$ and $42 \div 6 = 7$.

4. **D.** $6 = 2 \times 3$, $10 = 2 \times 5$ and $15 = 3 \times 5$. Taking each required prime once gives LCM = $2 \times 3 \times 5 = 30$. It contains the prime factors needed by each number. Check: $30 \div 6 = 5$, $30 \div 10 = 3$ and $30 \div 15 = 2$. Taking only primes shared by all three would find the HCF, which is 1.

5. **B.** The piece length must divide both rope lengths exactly, so use HCF. $96 = 2^5 \times 3$ and $144 = 2^4 \times 3^2$, giving HCF = $2^4 \times 3 = 48$ cm. The ropes give $96 \div 48 = 2$ and $144 \div 48 = 3$ pieces. Their LCM, 288 cm, is longer than either rope and cannot be cut from either one.

6. **C.** The kit count must divide 60 and 84. Since $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ and $84 = 2^2 \times 3 \times 7$, the greatest count is HCF = 12. Each kit contains $60 \div 12 = 5$ pencils and $84 \div 12 = 7$ erasers. Check: $12 \times 5 = 60$ and $12 \times 7 = 84$. 6 kits are possible but do not give the greatest count.

7. **A.** The elapsed time must be a positive multiple of both 9 and 15. Since $9 = 3^2$ and $15 = 3 \times 5$, LCM $= 3^2 \times 5 = 45$ minutes. This is $45 \div 9 = 5$ intervals of the first alarm and $45 \div 15 = 3$ intervals of the second. The current time, 0 minutes, is excluded by “next”.

8. **D.** The unknown is the total number of beads. It must be divisible by 12 and by 18, so find their LCM. $12 = 2^2 \times 3$ and $18 = 2 \times 3^2$ give LCM = $2^2 \times 3^2 = 36$. Then $36 \div 12 = 3$ groups or $36 \div 18 = 2$ groups. The word “groups” alone does not mean HCF: here the unknown total must be a multiple of each given group size.

9. **C.** For two positive integers, the product is HCF × LCM = $6 \times 210 = 1260$. The other number is $1260 \div 30 = 42$. Verify the original data: $30 = 2 \times 3 \times 5$ and $42 = 2 \times 3 \times 7$, so HCF = $2 \times 3 = 6$ and LCM = $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$. The product calculation and both checks agree.

10. **A.** Remove the specified remainder: $111 - 3 = 108$ and $147 - 3 = 144$. A valid divisor must divide both. Since $108 = 2^2 \times 3^3$ and $144 = 2^4 \times 3^2$, HCF = $2^2 \times 3^2 = 36$. Verify: $111 = 36 \times 3 + 3$ and $147 = 36 \times 4 + 3$, with $0 \le 3 < 36$. The divisor 3 cannot leave remainder 3 because a remainder must be smaller than its divisor.

11. **B.** A common divisor cannot contain more copies of a prime than either number supplies. Use the smaller exponents: HCF = $2^2 \times 3 = 12$. Check: $24 \div 12 = 2$ and $36 \div 12 = 3$. The larger exponents give LCM = $2^3 \times 3^2 = 72$, which is divisible by 24 and 36. As 72 exceeds both positive numbers, it cannot divide either of them.

12. **D.** $4 = 2^2$, $6 = 2 \times 3$ and $8 = 2^3$. Their HCF is 2 and LCM is $2^3 \times 3 = 24$. Hence HCF × LCM = 48, whereas their product is 192. One valid counterexample disproves an “always” claim. For three exponents, adding only the smallest and largest does not generally count all three; the two-number proof cannot be extended in that way.

9 Use an error to choose what to revisit

- Confused factor and multiple, or obtained HCF 0: revisit section 2
- Chose the wrong prime powers or ignored an absent prime: revisit section 3
- Chose a method only from a word such as “groups”: revisit section 4 and name the unknown
- Used the product identity with three numbers or did not verify a missing number: revisit section 5
- Used the original dividends or forgot remainder < divisor: revisit section 6

Cover the solution, retry a missed question, and explain why your chosen answer divides the totals or is divisible by the intervals. Then check the result in the original situation. A correct numerical answer without the right divisibility model is worth revisiting too.

Sources and next step

The teaching, examples and questions are original. The mathematical reference is NCERT Class VI Mathematics Chapter 3 Playing with Numbers on IIT Kanpur SATHEE: §3.7 Highest Common Factor, including Exercise 3.6; §3.8 Lowest Common Multiple; and §3.9 Some Problems on HCF and LCM, including Exercise 3.7. These sections support the definitions, prime-factor methods and exact-measure/common-multiple models. The two-number product identity above is justified here with our own prime-count argument; it is not presented as a proof quoted from that chapter.

The full HTML sections were inspected on 30 September 2026. The mirror does not establish a verified NCERT edition/reprint year or printed-page mapping, so section headings are used instead of guessed pages. Its tables contain transcription issues; source exercises and diagrams have not been copied. The ambiguous “least number leaving a remainder” wording in §3.9 Example 14 is not used in this lesson.

Next, Fractions Decimals and Exact Calculation uses common factors to simplify fractions and common multiples to choose shared denominators.

A concrete way to picture the idea

Cutting shorter pieces and building a shared length

Imagine strips of lengths 18 cm and 30 cm. There are two different jobs.

For the cutting job, cut each strip into pieces of the same greatest possible whole-centimetre length, with no waste. The piece length must divide both 18 and 30, so it is 6 cm. The strips produce 3 and 5 pieces.

For the building job, you have enough whole 18 cm strips and enough whole 30 cm strips. Make one line using only 18 cm strips and another using only 30 cm strips. Find the shortest positive length both lines can have, without cutting any strip. This shared length must be a multiple of 18 and 30, so it is 90 cm: 5 strips of 18 cm and 3 strips of 30 cm.

HCF answers what can fit into both given totals. LCM answers what can contain an exact number of each given unit. The comparison is about exact lengths; the kit and signal problems still require you to name their own unknown quantities and conditions.

Quick reference

Meaning and prime powers

Use positive integers throughout this lesson.

- HCF is the greatest positive common divisor. It divides every given number. Choose the smallest exponent of each prime across all numbers; an absent prime has count 0. If no prime is shared by all, HCF = 1.
- LCM is the least positive common multiple. Every given number divides it. Choose the largest exponent of every prime that occurs in any number.
- HCF ≤ the smallest given number; LCM ≥ the largest given number. These are checks, not complete proofs.

Model choice

Name the unknown before choosing a method.

- Greatest exact piece size or greatest identical-kit count: the unknown divides each total → HCF
- Least total accommodating each given group size: every group size divides the unknown → LCM
- Next coincidence after a shared start, with fixed unskipped intervals: every interval divides the positive elapsed time → LCM

Use common units and check the result in the original situation.

Two-number identity

For two positive integers a, b only: HCF(a, b) × LCM(a, b) = a × b. Smaller prime count + larger prime count = their total count. A missing number equals (HCF × LCM) ÷ the known number; verify both HCF and LCM afterward. Co-prime pairs have HCF 1, so their LCM is their product. Do not apply the two-number identity to three numbers.

Specified common remainder

For the type taught here, subtract the stated remainder from both dividends, find the HCF of the two positive adjusted numbers, and check the candidate in the original divisions. Always require 0 ≤ remainder < divisor. Finding a common factor is not enough if the remainder condition fails.

महत्तम समापवर्तक लघुत्तम समापवर्त्य और सही विधि का चयन

आप क्या सीखेंगे

पूरी तरह विभाजित होने की शर्त से तय करें कि किसी प्रश्न में साझा गुणनखंड चाहिए या साझा गुणज। इस पाठ के अंत तक आप:

- दो या तीन धनात्मक पूर्णांकों का महत्तम समापवर्तक और लघुत्तम समापवर्त्य निकालेंगे तथा चुनी गई हर अभाज्य घात का कारण बताएँगे
- पहचानेंगे कि अज्ञात राशि को किन संख्याओं का भाजक होना चाहिए या किन संख्याओं से विभाज्य होना चाहिए
- स्पष्ट शर्तों के साथ अधिकतम एक जैसी किट और अगली बार साथ होने वाली घटनाओं के प्रश्न हल करेंगे
- दो धनात्मक पूर्णांकों के गुणनफल वाले संबंध का उपयोग और जाँच करेंगे
- दिए गए समान शेषफल के एक प्रकार के प्रश्न को पूर्ण विभाज्यता में बदलेंगे

यह पाठ गुणनखंड विभाज्यता और अभाज्य गुणनखंडन के बाद आता है। यहाँ जिन संख्याओं का महत्तम समापवर्तक और लघुत्तम समापवर्त्य निकालेंगे, वे धनात्मक पूर्णांक हैं: 1, 2, 3, ...। ये विधियाँ यहाँ भिन्नों, ऋणात्मक संख्याओं या शून्य पर नहीं लगाई जाएँगी। HCF का अर्थ महत्तम समापवर्तक है; इसे सबसे बड़ा साझा भाजक या GCD भी कहते हैं। LCM का अर्थ लघुत्तम समापवर्त्य है; यहाँ इसका अर्थ हमेशा सबसे छोटा धनात्मक साझा गुणज है।

1 विधि चुनने से पहले गुणनखंड याद करें

उत्तर पढ़ने से पहले ये तीन छोटे प्रश्न करें।

1. 60 को अभाज्य घातों के गुणनफल के रूप में लिखिए।

2. 8 और 12 के धनात्मक साझा गुणनखंड लिखिए।

3. 35 = 5 × 7 में 5 और 35 का संबंध समझाइए।

उत्तर और कारण:

1. $60 = 2^2 \times 3 \times 5$। गुणा करके जाँचें: 4 × 3 × 5 = 60। अभाज्य सूची का हर गुणनखंड अभाज्य है।

2. 8 के गुणनखंड 1, 2, 4, 8 हैं; 12 के गुणनखंड 1, 2, 3, 4, 6, 12 हैं। साझा गुणनखंड 1, 2, 4 हैं।

3. 5, संख्या 35 का गुणनखंड है, क्योंकि 35 ÷ 5 = 7 और शेषफल 0 है। इसी संबंध को ऐसे भी कह सकते हैं: 35, संख्या 5 का गुणज है, क्योंकि 35 = 5 × 7।

यदि गुणनखंडों की जगह गुणज लिख दिए, तो पहले यह वाक्य पूरा करें: “इस संख्या से दिया गया कुल पूरा विभाजित होता है।” यदि अभाज्य गुणनखंडों को गुणा करने पर मूल संख्या नहीं आती, तो पिछले पाठ की मदद से सुधारें। अब हम उसी ज्ञान का उपयोग करेंगे; विभाज्यता की सभी कसौटियाँ दोहराएँगे नहीं।

2 विभाज्यता की दो अलग दिशाएँ

साझा गुणनखंड से दी गई हर संख्या पूरी विभाजित होती है। इस गुण वाली सबसे बड़ी धनात्मक संख्या महत्तम समापवर्तक है। 1 से हर धनात्मक पूर्णांक विभाजित होता है, इसलिए महत्तम समापवर्तक कम से कम 1 होता है। यदि सभी संख्याओं में कोई अभाज्य गुणनखंड साझा न हो, तो महत्तम समापवर्तक 1 होगा, 0 नहीं।

साझा गुणज दी गई हर संख्या से विभाज्य होता है। इस गुण वाली सबसे छोटी धनात्मक संख्या लघुत्तम समापवर्त्य है। हालाँकि 0 हर धनात्मक पूर्णांक से विभाज्य है, हमारी लघुत्तम समापवर्त्य की परिभाषा में वह शामिल नहीं है। दी गई संख्याओं का गुणनफल एक साझा गुणज होता है, पर उसमें अभाज्य गुणनखंड अनावश्यक रूप से दोहर सकते हैं; इसलिए वह सबसे छोटा साझा गुणज होना जरूरी नहीं है।

गणना से पहले दिशा पहचानें:

- महत्तम समापवर्तक: दी गई प्रत्येक संख्या ÷ उत्तर का मान पूर्ण संख्या होना चाहिए
- लघुत्तम समापवर्त्य: उत्तर ÷ दी गई प्रत्येक संख्या का मान पूर्ण संख्या होना चाहिए

हल सहित उदाहरण 1 सूचियों और अभाज्य गुणनखंडों से अर्थ समझें

18 और 30 का महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम समापवर्त्य निकालिए।

18 के धनात्मक गुणनखंड 1, 2, 3, 6, 9, 18 हैं। 30 के धनात्मक गुणनखंड 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 हैं। साझा गुणनखंड 1, 2, 3, 6 हैं, इसलिए महत्तम समापवर्तक = 6।

धनात्मक गुणज बढ़ते क्रम में लिखें:

- 18: 18, 36, 54, 72, 90, ...
- 30: 30, 60, 90, ...

पहला साझा मान 90 है, इसलिए लघुत्तम समापवर्त्य = 90।

अब $18 = 2 \times 3^2$ और $30 = 2 \times 3 \times 5$ का उपयोग करें। साझा गुणनखंड के लिए एक 2 और एक 3 ले सकते हैं: दोनों संख्याओं में ये मौजूद हैं। दूसरा 3 नहीं ले सकते, क्योंकि 30 में वह नहीं है; 5 नहीं ले सकते, क्योंकि 18 में वह नहीं है। इसलिए महत्तम समापवर्तक = $2 \times 3 = 6$।

साझा गुणज में एक 2, दो 3 और एक 5 चाहिए, ताकि दोनों संख्याओं के लिए जरूरी गुणनखंड मौजूद हों। इससे लघुत्तम समापवर्त्य = $2 \times 3^2 \times 5 = 90$ मिलता है। साझा 2 और 3 को दो बार गिनने की जरूरत नहीं है।

जाँच: 18 ÷ 6 = 3 और 30 ÷ 6 = 5; 90 ÷ 18 = 5 और 90 ÷ 30 = 3। इन जाँचों से विभाज्यता की पुष्टि होती है। पूरी सूचियाँ या अभाज्य गुणनखंडों का तर्क “सबसे बड़ा” और “सबसे छोटा” सिद्ध करता है। गुणनफल 18 × 30 = 540 एक साझा गुणज है, लेकिन लघुत्तम समापवर्त्य नहीं है।

3 घातों की सारणी क्यों काम करती है

अभाज्य की घात बताती है कि वह गुणनखंड कितनी बार आया है। घातों की सारणी में किसी अभाज्य के न होने पर 0 लिखें। इसका अर्थ है कि उस संख्या में उस अभाज्य की कोई प्रति उपलब्ध या आवश्यक नहीं है; गुणनफल में उसका योगदान 1 है।

महत्तम समापवर्तक के लिए चुनी अभाज्य घात हर संख्या में समा सकनी चाहिए। उसकी घात उस अभाज्य के स्तंभ में लिखी किसी भी घात से अधिक नहीं हो सकती। इसलिए सबसे बड़ी उपयुक्त घात उस स्तंभ की सबसे छोटी प्रविष्टि होगी। हर अभाज्य के लिए ऐसा करें। न्यूनतम घात 0 हो तो उस अभाज्य को गुणनफल में न लें। यदि सभी न्यूनतम घातें शून्य हों, तो महत्तम समापवर्तक 1 है।

लघुत्तम समापवर्त्य में हर दी गई संख्या के लिए प्रत्येक अभाज्य की पर्याप्त प्रतियाँ चाहिए। इसलिए हर अभाज्य की घात उसके स्तंभ की सबसे बड़ी प्रविष्टि तक पहुँचनी चाहिए। ठीक उतनी प्रतियाँ लेने से जरूरत पूरी होती है और अनावश्यक गुणनखंड नहीं जुड़ते। प्रत्येक साझा गुणज में ये आवश्यक घातें होंगी, इसलिए वह इस प्रकार बनी संख्या का गुणज होगा। यही कारण है कि यह विधि सबसे छोटा धनात्मक साझा गुणज देती है।

यही तर्क दो संख्याओं और तीन संख्याओं, दोनों के लिए काम करता है। हम छोटी या बड़ी मूल संख्या नहीं चुन रहे; हर अभाज्य की घातों की अलग तुलना कर रहे हैं।

हल सहित उदाहरण 2 तीन संख्याओं की घात सारणी

72, 90 और 120 का महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम समापवर्त्य निकालिए।

$72 = 2^3 \times 3^2$; $90 = 2 \times 3^2 \times 5$; $120 = 2^3 \times 3 \times 5$।

संख्या	2 की घात	3 की घात	5 की घात
72	3	2	0
90	1	2	1
120	3	1	1
स्तंभ में सबसे छोटी	1	1	0
स्तंभ में सबसे बड़ी	3	2	1

महत्तम समापवर्तक = $2^1 \times 3^1 = 6$। 5 नहीं लिया, क्योंकि 72 में कोई 5 नहीं है। लघुत्तम समापवर्त्य = $2^3 \times 3^2 \times 5 = 8 \times 9 \times 5 = 360$।

गुणनखंड की जाँच: 72 ÷ 6 = 12; 90 ÷ 6 = 15; 120 ÷ 6 = 20। गुणज की जाँच: 360 ÷ 72 = 5; 360 ÷ 90 = 4; 360 ÷ 120 = 3।

गलती की जाँच: 30, संख्याओं 90 और 120 का साझा गुणनखंड है, लेकिन उससे 72 विभाजित नहीं होता। “साझा” में दी गई हर संख्या शामिल है। शून्य प्रविष्टि को छोड़ देने से प्रश्न बदल जाता है।

परिमाण की दो छोटी जाँचें गलती पकड़ने में मदद करती हैं: महत्तम समापवर्तक सबसे छोटी दी गई धनात्मक संख्या से बड़ा नहीं हो सकता और लघुत्तम समापवर्त्य सबसे बड़ी दी गई संख्या से छोटा नहीं हो सकता। ये जाँचें गलत उत्तर को अस्वीकार कर सकती हैं, लेकिन अकेले उत्तर की सत्यता सिद्ध नहीं करतीं।

4 अज्ञात राशि से सही विधि चुनें

HCF या LCM चुनने से पहले अज्ञात राशि का नाम लिखें और विभाज्यता वाला वाक्य पूरा करें।

1. यदि अज्ञात राशि से हर दिया कुल पूरा विभाजित होना चाहिए, तो वह साझा गुणनखंड है। उसकी सबसे बड़ी संभव मात्रा के लिए महत्तम समापवर्तक लें।

2. यदि अज्ञात राशि हर दिए आकार या अंतराल से विभाज्य होनी चाहिए, तो वह साझा गुणज है। उसकी सबसे छोटी धनात्मक मात्रा के लिए लघुत्तम समापवर्त्य लें।

केवल “समूह” या “अधिकतम” जैसे एक शब्द से विधि न चुनें। किटों की अधिकतम संख्या से उपलब्ध कुल संख्याएँ पूरी विभाजित होती हैं। लेकिन दो दिए समूह-आकारों में बाँटी जा सकने वाली सबसे छोटी कुल संख्या उन आकारों से विभाज्य होनी चाहिए। मापों की तुलना करने से पहले उन्हें समान इकाई में भी लिखें।

हल सहित उदाहरण 3 एक जैसी किटों की अधिकतम संख्या

सभी 84 नोटबुक और 126 पेन का उपयोग करके अधिकतम संख्या में एक जैसी किट बनानी हैं; कुछ भी नहीं बचना चाहिए। हर किट में नोटबुक की संख्या समान और पेन की संख्या समान होनी चाहिए। किटों की संख्या और प्रत्येक की सामग्री निकालिए।

अज्ञात राशि किटों की संख्या है। उससे 84 और 126 दोनों पूरे विभाजित होने चाहिए। इसलिए इनका महत्तम समापवर्तक चाहिए। $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ और $126 = 2 \times 3^2 \times 7$। महत्तम समापवर्तक = 2 × 3 × 7 = 42 किट।

प्रत्येक किट में 84 ÷ 42 = 2 नोटबुक और 126 ÷ 42 = 3 पेन होंगे। जाँच: 42 × 2 = 84 और 42 × 3 = 126, इसलिए सभी वस्तुएँ उपयोग हुईं और हर किट समान है।

गलती की जाँच: 42 किटों की संख्या है, प्रत्येक किट की वस्तुओं की संख्या नहीं। कम किटों में प्रत्येक में अधिक वस्तुएँ आ सकती हैं, लेकिन प्रश्न में किटों की अधिकतम संख्या पूछी गई है। लघुत्तम समापवर्त्य से उपलब्ध कुल पूरी विभाजित नहीं होते और वह इस प्रश्न का उत्तर नहीं दे सकता।

हल सहित उदाहरण 4 अगली बार साथ होने वाली घटना

तीन संकेत बिना कोई बार छोड़े, क्रमशः हर 8, 12 और 18 सेकंड के निश्चित अंतराल पर बजते हैं। वे अभी साथ बजे हैं। कितने धनात्मक सेकंड बाद तीनों अगली बार साथ बजेंगे?

अज्ञात राशि अभी से बीता समय है। उस समय हर संकेत बजने के लिए उसके अंतरालों की पूरी संख्या बीतनी चाहिए। इसलिए 8, 12 और 18 का सबसे छोटा धनात्मक साझा गुणज चाहिए। $8 = 2^3$; $12 = 2^2 \times 3$; $18 = 2 \times 3^2$। लघुत्तम समापवर्त्य $= 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$ सेकंड।

जाँच: 72 ÷ 8 = 9 अंतराल; 72 ÷ 12 = 6 अंतराल; 72 ÷ 18 = 4 अंतराल। आवश्यक अधिकतम अभाज्य घातों से स्पष्ट है कि इससे छोटा कोई धनात्मक समय तीनों के लिए काम नहीं करेगा।

गलती की जाँच: 0 अभी का साझा समय है, अगली बार का नहीं। अंतरालों को जोड़ने या उनका औसत लेने से तीनों से विभाज्यता सुनिश्चित नहीं होती। इस विधि के लिए एक साझा शुरुआती समय, निश्चित अंतराल और कोई संकेत न छूटने की शर्तें जरूरी हैं।

5 ठीक दो धनात्मक पूर्णांकों के लिए गुणनफल संबंध

धनात्मक पूर्णांक a और b के लिए: $HCF(a, b) \times LCM(a, b) = a \times b$।

कारण समझें। किसी एक अभाज्य को देखें। मान लें वह a में r बार और b में s बार है। महत्तम समापवर्तक में r और s में से छोटी संख्या में प्रतियाँ ली जाती हैं और लघुत्तम समापवर्त्य में बड़ी संख्या में। दोनों मिलकर $r + s$ प्रतियाँ गिनते हैं, जितनी गुणनफल $a \times b$ में होती हैं। संकेतों में $\min(r, s) + \max(r, s) = r + s$; यहाँ “min” और “max” का अर्थ छोटी और बड़ी संख्या है। यह हर अभाज्य के लिए सही है, उस अभाज्य के लिए भी जो किसी एक संख्या में नहीं है और जिसकी गिनती 0 है। इसलिए दोनों गुणनफलों के अभाज्य गुणनखंड बिल्कुल समान हैं।

18 और 30 के जोड़े के लिए $6 \times 90 = 540 = 18 \times 30$ मिलता है। यदि दोनों संख्याएँ सह-अभाज्य हैं, तो उनका महत्तम समापवर्तक 1 है और लघुत्तम समापवर्त्य उनके गुणनफल के बराबर है। यह निष्कर्ष महत्तम समापवर्तक के 1 होने पर निर्भर है; किसी भी दो संख्याओं को गुणा करके उनका लघुत्तम समापवर्त्य निकालने का नियम नहीं है।

हल सहित उदाहरण 5 अज्ञात संख्या निकालें और जाँचें

दो धनात्मक पूर्णांकों का महत्तम समापवर्तक 12 और लघुत्तम समापवर्त्य 180 है। एक संख्या 36 है। दूसरी निकालिए।

उनका गुणनफल $12 \times 180 = 2160$ है। ज्ञात संख्या से भाग दें: दूसरी संख्या = 2160 ÷ 36 = 60।

अब मूल दोनों शर्तें जाँचें। $36 = 2^2 \times 3^2$ और $60 = 2^2 \times 3 \times 5$। इसलिए महत्तम समापवर्तक $= 2^2 \times 3 = 12$ और लघुत्तम समापवर्त्य $= 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$। दोनों प्रश्न से मेल खाते हैं। गुणनफल सूत्र एक संभावित उत्तर देता है; उसका महत्तम समापवर्तक और लघुत्तम समापवर्त्य जाँचने से असंगत दिए आँकड़े या गणना की गलती पकड़ी जा सकती है।

इस संबंध को तीन संख्याओं पर न बढ़ाएँ। 4, 6 और 8 का महत्तम समापवर्तक = 2 और लघुत्तम समापवर्त्य = 24 है। तीनों का गुणनफल $4 \times 6 \times 8 = 192$ है, जबकि महत्तम समापवर्तक × लघुत्तम समापवर्त्य $= 2 \times 24 = 48$ है। तीन अभाज्य गिनतियों में केवल सबसे छोटी और सबसे बड़ी लेने से सामान्यतः तीनों की गिनती नहीं होती।

6 दिया हुआ शेषफल पूर्ण विभाज्यता वाली संख्याएँ बदलता है

धनात्मक भाजक के लिए शेषफल सहित भाग का अर्थ है: भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल, जहाँ भागफल एक पूर्ण संख्या है और $0 \le$ शेषफल $<$ भाजक।

यदि दो दिए भाज्यों को भाग देने पर एक ही बताया हुआ शेषफल बचे, तो दोनों में से वह शेषफल घटाएँ। अब भाजक से दोनों बदली हुई संख्याएँ पूरी विभाजित होनी चाहिए। नीचे दिए प्रकार में दोनों बदली संख्याएँ धनात्मक हैं। सबसे बड़ा भाजक पूछे जाने पर उनका महत्तम समापवर्तक निकालें। फिर जाँचें कि दिया शेषफल इस संभावित भाजक से छोटा है और मूल भाग संबंध में उत्तर वापस रखकर देखें। शेषफल घटाने से पूर्ण विभाज्यता सामने आती है; इससे शेषफल की शर्त को छोड़ने की अनुमति नहीं मिलती।

हल सहित उदाहरण 6 शेषफल 2 छोड़ने वाला सबसे बड़ा भाजक

वह सबसे बड़ा धनात्मक पूर्णांक निकालिए जिससे 98 और 146 को भाग देने पर प्रत्येक में शेषफल 2 मिले।

1. शेषफल घटाएँ: 98 − 2 = 96 और 146 − 2 = 144।

2. किसी भी सही भाजक से 96 और 144 दोनों पूरे विभाजित होने चाहिए। गुणनखंडन करें: $96 = 2^5 \times 3$ और $144 = 2^4 \times 3^2$।

3. महत्तम समापवर्तक = $2^4 \times 3 = 16 \times 3 = 48$, इसलिए कोई सही भाजक 48 से बड़ा नहीं हो सकता।

4. संभावित उत्तर जाँचें: $98 = 48 \times 2 + 2$ और $146 = 48 \times 3 + 2$।

5. शेषफल मान्य है, क्योंकि $0 \leq 2 < 48$। इसलिए अपेक्षित सबसे बड़ा भाजक 48 है।

गलती की जाँच: HCF(98, 146) = 2 पूर्ण विभाज्यता के अलग प्रश्न का उत्तर है। यहाँ 2 से भाग देने पर शेषफल 0 आता है और भाजक 2 के साथ शेषफल 2 मान्य नहीं होगा। हमने सबसे बड़े भाजक का प्रश्न हल किया है; कोई सामान्य “लघुत्तम समापवर्त्य में शेषफल जोड़ें” नियम नहीं बनाया है।

7 स्वतंत्र अभ्यास

उत्तर-सूची देखने से पहले सभी बारह प्रश्न करें। एक विकल्प चुनें और उसके समर्थन में विभाज्यता की शर्त या गणना लिखें। यह बिना समय-सीमा वाला सीखने का अभ्यास है; इसमें ऋणात्मक अंकन या उत्तीर्ण सीमा नहीं है। यह पूरे RRB CBT का अनुकरण नहीं है।

1. 24 और 40 का महत्तम समापवर्तक क्या है?

   A. 4

   B. 8

   C. 16

   D. 120

---

2. 15 और 20 का लघुत्तम समापवर्त्य क्या है?

   A. 5

   B. 30

   C. 60

   D. 300

---

3. 18, 30 और 42 का महत्तम समापवर्तक क्या है?

   A. 6

   B. 3

   C. 18

   D. 126

---

4. 6, 10 और 15 का लघुत्तम समापवर्त्य क्या है?

   A. 1

   B. 15

   C. 60

   D. 30

---

5. 96 cm और 144 cm लंबी रस्सियों को समान लंबाई के टुकड़ों में बिना कुछ बचाए काटना है। प्रत्येक टुकड़े की लंबाई सेंटीमीटर में धनात्मक पूर्णांक होनी चाहिए। टुकड़े की अधिकतम लंबाई क्या होगी?

   A. 24 cm

   B. 48 cm

   C. 72 cm

   D. 288 cm

---

6. सभी 60 पेंसिल और 84 रबर से अधिकतम संख्या में एक जैसी किट बनानी हैं। हर किट में पेंसिलों की संख्या समान और रबरों की संख्या समान होनी चाहिए। कौन-सा परिणाम सही है?

A. 6 किट; प्रत्येक में 10 पेंसिल और 14 रबर

B. 12 किट; प्रत्येक में 7 पेंसिल और 5 रबर

C. 12 किट; प्रत्येक में 5 पेंसिल और 7 रबर

D. 24 किट; प्रत्येक में 5 पेंसिल और 7 रबर

---

7. दो अलार्म बिना कोई बार छोड़े, क्रमशः हर 9 मिनट और हर 15 मिनट के निश्चित अंतराल पर बजते हैं। वे अभी साथ बजे हैं। अगली बार कितने धनात्मक मिनट बाद साथ बजेंगे?

A. 45 मिनट

B. 3 मिनट

C. 24 मिनट

D. 135 मिनट

---

8. मोतियों की सबसे छोटी धनात्मक संख्या क्या है जिसे बिना कोई मोती बचाए या तो 12-12 के समूहों में, या अलग विकल्प के रूप में 18-18 के समूहों में बाँटा जा सके?

A. 6

B. 24

C. 216

D. 36

---

9. दो धनात्मक पूर्णांकों का महत्तम समापवर्तक 6 और लघुत्तम समापवर्त्य 210 है। एक पूर्णांक 30 है। दूसरा क्या है?

A. 7

B. 36

C. 42

D. 70

---

10. वह सबसे बड़ा धनात्मक पूर्णांक क्या है जिससे 111 और 147 को भाग देने पर प्रत्येक में शेषफल 3 मिले?

A. 36

B. 3

C. 48

D. 108

---

11. एक विद्यार्थी $24 = 2^3 \times 3$ और $36 = 2^2 \times 3^2$ लिखता है। फिर हर अभाज्य की बड़ी घात लेकर महत्तम समापवर्तक = 72 बताता है। सही सुधार कौन-सा है?

A. 72 महत्तम समापवर्तक है, क्योंकि इसमें सभी अभाज्य गुणनखंड हैं

B. 72 लघुत्तम समापवर्त्य है; महत्तम समापवर्तक 12 है

C. महत्तम समापवर्तक 6 है, क्योंकि दोहराए अभाज्यों को छोड़ देना चाहिए

D. महत्तम समापवर्तक 0 है, क्योंकि घातें अलग हैं

---

12. एक विद्यार्थी का दावा है कि तीन धनात्मक पूर्णांकों के लिए भी महत्तम समापवर्तक × लघुत्तम समापवर्त्य हमेशा तीनों संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है। कौन-सी गणना इस दावे को सही ढंग से गलत सिद्ध करती है?

A. 4, 6, 8 के लिए: महत्तम समापवर्तक = 2, लघुत्तम समापवर्त्य = 96 और दोनों गुणनफल 192 हैं

B. 4, 6, 8 के लिए: महत्तम समापवर्तक = 4, लघुत्तम समापवर्त्य = 24 और दोनों गुणनफल 96 हैं

C. 4, 6, 8 के लिए: महत्तम समापवर्तक = 2, लघुत्तम समापवर्त्य = 24 और दोनों गुणनफल 48 हैं

D. 4, 6, 8 के लिए: महत्तम समापवर्तक × लघुत्तम समापवर्त्य = 2 × 24 = 48, लेकिन 4 × 6 × 8 = 192

---

8 कारण सहित उत्तर-सूची

1. **B.** $24 = 2^3 \times 3$ और $40 = 2^3 \times 5$। दोनों में 2 तीन बार आता है, इसलिए महत्तम समापवर्तक $= 2^3 = 8$। जाँच: $24 \div 8 = 3$ और $40 \div 8 = 5$। साझा गुणनखंड 4 सबसे बड़ा नहीं है; 16 से न 24 और न 40 पूरा विभाजित होता है।

2. **C.** $15 = 3 \times 5$ और $20 = 2^2 \times 5$। सबसे छोटे साझा गुणज में 2^2, 3 और 5 एक बार चाहिए: $4 \times 3 \times 5 = 60$। जाँच: $60 \div 15 = 4$ और $60 \div 20 = 3$। 300 भी साझा गुणज है, लेकिन सबसे छोटा नहीं है।

3. **A.** $18 = 2 \times 3^2$, $30 = 2 \times 3 \times 5$ और $42 = 2 \times 3 \times 7$। हर संख्या में केवल एक 2 और एक 3 साझा हैं, इसलिए महत्तम समापवर्तक $= 2 \times 3 = 6$। जाँच: $18 \div 6 = 3$, $30 \div 6 = 5$ और $42 \div 6 = 7$।

4. **D.** $6 = 2 \times 3$, $10 = 2 \times 5$ और $15 = 3 \times 5$। हर आवश्यक अभाज्य गुणनखंड को एक बार लेने पर लघुत्तम समापवर्त्य $= 2 \times 3 \times 5 = 30$ मिलता है। इसमें हर संख्या के लिए जरूरी अभाज्य गुणनखंड मौजूद हैं। जाँच: $30 \div 6 = 5$, $30 \div 10 = 3$ और $30 \div 15 = 2$। केवल तीनों में साझा अभाज्य गुणनखंड लेने से महत्तम समापवर्तक मिलेगा, जो 1 है।

5. **B.** टुकड़े की लंबाई से दोनों रस्सियों की लंबाइयाँ पूरी विभाजित होनी चाहिए, इसलिए महत्तम समापवर्तक लें। $96 = 2^5 \times 3$ और $144 = 2^4 \times 3^2$ से महत्तम समापवर्तक $= 2^4 \times 3 = 48$ cm मिलता है। रस्सियों से क्रमशः $96 \div 48 = 2$ और $144 \div 48 = 3$ टुकड़े बनेंगे। इनका लघुत्तम समापवर्त्य 288 cm दोनों रस्सियों से लंबा है; ऐसा टुकड़ा किसी रस्सी से नहीं कट सकता।

6. **C.** किटों की संख्या से 60 और 84 दोनों पूरे विभाजित होने चाहिए। $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ और $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ हैं, इसलिए अधिकतम संख्या महत्तम समापवर्तक = 12 है। हर किट में $60 \div 12 = 5$ पेंसिल और $84 \div 12 = 7$ रबर होंगे। जाँच: $12 \times 5 = 60$ और $12 \times 7 = 84$। 6 किट बन सकती हैं, पर वह अधिकतम संख्या नहीं है।

7. **A.** बीता समय 9 और 15 दोनों का धनात्मक गुणज होना चाहिए। $9 = 3^2$ और $15 = 3 \times 5$ से लघुत्तम समापवर्त्य $= 3^2 \times 5 = 45$ मिनट है। इसमें पहले अलार्म के $45 \div 9 = 5$ और दूसरे के $45 \div 15 = 3$ अंतराल पूरे होते हैं। “अगली बार” के कारण अभी का समय, 0 मिनट, उत्तर नहीं है।

8. **D.** अज्ञात राशि मोतियों की कुल संख्या है। यह 12 और 18 दोनों से विभाज्य होनी चाहिए, इसलिए उनका लघुत्तम समापवर्त्य निकालें। $12 = 2^2 \times 3$ और $18 = 2 \times 3^2$ से लघुत्तम समापवर्त्य $= 2^2 \times 3^2 = 36$ मिलता है। तब $36 \div 12 = 3$ समूह या $36 \div 18 = 2$ समूह बनेंगे। केवल “समूह” शब्द देखकर महत्तम समापवर्तक नहीं चुन सकते; यहाँ अज्ञात कुल संख्या दोनों दिए समूह-आकारों की गुणज होनी चाहिए।

9. **C.** दो धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल महत्तम समापवर्तक × लघुत्तम समापवर्त्य $= 6 \times 210 = 1260$ है। दूसरी संख्या $1260 \div 30 = 42$ होगी। मूल शर्तों की जाँच: $30 = 2 \times 3 \times 5$ और $42 = 2 \times 3 \times 7$, इसलिए महत्तम समापवर्तक $= 2 \times 3 = 6$ और लघुत्तम समापवर्त्य $= 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$। गुणनफल की गणना और दोनों जाँच सही हैं।

10. **A.** पहले दिया शेषफल घटाएँ: $111 - 3 = 108$ और $147 - 3 = 144$। सही भाजक से दोनों पूरी विभाजित होनी चाहिए। $108 = 2^2 \times 3^3$ और $144 = 2^4 \times 3^2$ से महत्तम समापवर्तक $= 2^2 \times 3^2 = 36$ है। जाँच: $111 = 36 \times 3 + 3$ और $147 = 36 \times 4 + 3$, जहाँ $0 \leq 3 < 36$ है। भाजक 3 होने पर शेषफल 3 नहीं हो सकता, क्योंकि शेषफल भाजक से छोटा होना चाहिए।

11. **B.** साझा भाजक में किसी अभाज्य की इतनी प्रतियाँ नहीं हो सकतीं जो किसी एक संख्या में उपलब्ध ही न हों। छोटी घातें लें: महत्तम समापवर्तक $= 2^2 \times 3 = 12$। जाँच: $24 \div 12 = 2$ और $36 \div 12 = 3$। बड़ी घातों से लघुत्तम समापवर्त्य $= 2^3 \times 3^2 = 72$ मिलता है, जो 24 और 36 दोनों से विभाज्य है। 72 दोनों धनात्मक संख्याओं से बड़ा है, इसलिए वह इनमें से किसी का भाजक नहीं हो सकता।

12. **D.** $4 = 2^2$, $6 = 2 \times 3$ और $8 = 2^3$। इनका महत्तम समापवर्तक 2 तथा लघुत्तम समापवर्त्य $2^3 \times 3 = 24$ है। इसलिए महत्तम समापवर्तक × लघुत्तम समापवर्त्य = 48, जबकि तीनों का गुणनफल 192 है। एक सही प्रतिउदाहरण “हमेशा” वाले दावे को गलत सिद्ध कर देता है। तीन घातों में केवल सबसे छोटी और सबसे बड़ी जोड़ने से सामान्यतः तीनों की गिनती नहीं होती; दो संख्याओं वाला तर्क इस तरह नहीं बढ़ाया जा सकता।

9 गलती देखकर तय करें कि क्या दोहराना है

- गुणनखंड और गुणज में भ्रम हुआ या महत्तम समापवर्तक 0 मिला: खंड 2 देखें
- गलत अभाज्य घातें चुनीं या अनुपस्थित अभाज्य को अनदेखा किया: खंड 3 देखें
- केवल "समूह" जैसे शब्द से विधि चुनी: खंड 4 देखें और अज्ञात राशि का नाम लिखें
- तीन संख्याओं पर गुणनफल संबंध लगाया या अज्ञात संख्या की जाँच नहीं की: खंड 5 देखें
- मूल भाज्यों का उपयोग किया या शेषफल < भाजक भूल गए: खंड 6 देखें

हल ढकें, गलत हुए प्रश्न को फिर करें और समझाएँ कि चुना उत्तर कुल संख्याओं को पूरा विभाजित क्यों करता है या अंतरालों से विभाज्य क्यों है। फिर मूल परिस्थिति में उत्तर जाँचें। सही विभाज्यता वाला तर्क न होने पर सही संख्यात्मक उत्तर का भी दोबारा अध्ययन करें।

स्रोत और अगला कदम

शिक्षण, उदाहरण और प्रश्न मौलिक हैं। गणितीय संदर्भ है IIT Kanpur SATHEE पर NCERT कक्षा VI गणित अध्याय 3 Playing with Numbers: §3.7 Highest Common Factor, जिसमें Exercise 3.6 शामिल है; §3.8 Lowest Common Multiple; और §3.9 Some Problems on HCF and LCM, जिसमें Exercise 3.7 शामिल है। ये खंड परिभाषाओं, अभाज्य गुणनखंड वाली विधियों तथा पूरे माप और साझा गुणज की परिस्थितियों का आधार हैं। ऊपर दो संख्याओं के गुणनफल संबंध को अभाज्यों की गिनती के हमारे अपने तर्क से समझाया गया है; इसे उस अध्याय से उद्धृत प्रमाण नहीं कहा गया है।

पूरे HTML खंड 30 सितंबर 2026 को पढ़े गए। इस प्रति से NCERT का संस्करण या पुनर्मुद्रण वर्ष और छपे पृष्ठों का विश्वसनीय मिलान स्थापित नहीं होता। इसलिए अनुमानित पृष्ठों के बजाय खंड-शीर्षक दिए गए हैं। इसकी सारणियों में लिप्यंतरण की समस्याएँ हैं; स्रोत के अभ्यास और चित्र नकल नहीं किए गए। §3.9 के Example 14 में "शेषफल छोड़ने वाली सबसे छोटी संख्या" की अस्पष्ट शर्त वाला प्रश्न इस पाठ में उपयोग नहीं किया गया है।

अगला पाठ भिन्न दशमलव और सटीक गणना है। उसमें साझा गुणनखंडों से भिन्न सरल करेंगे और साझा गुणजों से समान हर चुनेंगे।

विचार को समझने का ठोस उदाहरण

छोटे टुकड़े काटना और समान कुल लंबाई बनाना

18 cm और 30 cm लंबी पट्टियों की कल्पना करें। यहाँ दो अलग काम हैं।

काटने के काम में हर पट्टी को समान और अधिकतम संभव लंबाई के टुकड़ों में काटें, ताकि कुछ न बचे। लंबाई सेंटीमीटर में पूर्णांक हो। टुकड़े की लंबाई से 18 और 30 दोनों पूरे विभाजित होने चाहिए, इसलिए वह 6 cm है। पट्टियों से क्रमशः 3 और 5 टुकड़े बनेंगे।

जोड़ने के काम में आपके पास पर्याप्त पूरी 18 cm पट्टियाँ और पर्याप्त पूरी 30 cm पट्टियाँ हैं। केवल 18 cm पट्टियों से एक कतार और केवल 30 cm पट्टियों से दूसरी कतार बनाएँ। किसी पट्टी को काटे बिना दोनों कतारों की सबसे छोटी समान धनात्मक लंबाई निकालें। यह लंबाई 18 और 30 की साझा गुणज होनी चाहिए, इसलिए वह 90 cm है: 18 cm की 5 पट्टियाँ और 30 cm की 3 पट्टियाँ।

महत्तम समापवर्तक बताता है कि कौन-सा माप दोनों दिए कुलों में पूरा समा सकता है। लघुत्तम समापवर्त्य बताता है कि कौन-सा कुल प्रत्येक दी हुई इकाई को पूरी संख्या में समेट सकता है। यह तुलना पूरी लंबाइयों की है; किट और संकेत वाले प्रश्नों में उनकी अपनी अज्ञात राशियाँ और शर्तें पहचानना फिर भी जरूरी है।

त्वरित संदर्भ

अर्थ और अभाज्य घातें

इस पूरे पाठ में धनात्मक पूर्णांकों का उपयोग करें।

- महत्तम समापवर्तक सबसे बड़ा धनात्मक साझा भाजक है। इससे हर दी गई संख्या विभाजित होती है। हर अभाज्य की सभी संख्याओं में सबसे छोटी घात चुनें; अनुपस्थित अभाज्य की गिनती 0 है। सभी में कोई अभाज्य साझा न हो, तो महत्तम समापवर्तक = 1।
- लघुत्तम समापवर्त्य सबसे छोटा धनात्मक साझा गुणज है। यह हर दी गई संख्या से विभाज्य है। किसी भी संख्या में आने वाले हर अभाज्य की सबसे बड़ी घात चुनें।
- महत्तम समापवर्तक ≤ सबसे छोटी दी गई संख्या; लघुत्तम समापवर्त्य ≥ सबसे बड़ी दी गई संख्या। ये जाँचें हैं, पूरे प्रमाण नहीं।

सही विधि चुनना

विधि से पहले अज्ञात राशि का नाम लिखें।

- टुकड़े का अधिकतम पूरा माप या एक जैसी किटों की अधिकतम संख्या: अज्ञात राशि से हर कुल विभाजित हो → महत्तम समापवर्तक
- हर दिए समूह-आकार में बाँटा जा सकने वाला सबसे छोटा कुल: हर समूह-आकार से अज्ञात राशि विभाजित हो → लघुत्तम समापवर्त्य
- साझा शुरुआत के बाद निश्चित अंतरालों पर बिना कोई बार छोड़े अगली साझा घटना: हर अंतराल से धनात्मक बीता समय विभाजित हो → लघुत्तम समापवर्त्य

समान इकाइयाँ लें और मूल परिस्थिति में उत्तर जाँचें।

दो संख्याओं का गुणनफल संबंध

केवल दो धनात्मक पूर्णांक a, b के लिए: HCF(a, b) × LCM(a, b) = a × b। अभाज्य की छोटी गिनती + बड़ी गिनती = उनकी कुल गिनती। अज्ञात संख्या = (महत्तम समापवर्तक × लघुत्तम समापवर्त्य) ÷ ज्ञात संख्या; बाद में दोनों की जाँच करें। सह-अभाज्य जोड़ों का महत्तम समापवर्तक 1 होता है, इसलिए उनका लघुत्तम समापवर्त्य उनका गुणनफल है। दो संख्याओं वाला संबंध तीन संख्याओं पर न लगाएँ।

बताया हुआ समान शेषफल

यहाँ सिखाए प्रकार में दोनों भाज्यों से बताया शेषफल घटाएँ, दोनों धनात्मक बदली संख्याओं का महत्तम समापवर्तक निकालें और मूल भागों में संभावित भाजक जाँचें। हमेशा 0 ≤ शेषफल < भाजक होना चाहिए। शेषफल की शर्त विफल हो, तो केवल साझा गुणनखंड मिल जाना पर्याप्त नहीं है।