

Weighted percentages and data cases

भारित प्रतिशत और आँकड़ों के प्रश्न

Ratios, percentages and proportional reasoning

अनुपात, प्रतिशत और समानुपाती तर्क

Read the explanations, try the examples and practice independently, then check the solutions.

व्याख्या पढ़ें, उदाहरण और अभ्यास स्वयं हल करें, फिर अपने तर्क को हल से जाँचें।

[English teaching and practice](#)

[हिंदी पाठ और अभ्यास](#)

Free original study material. Hindi explanations support learning; the GATE examination is conducted in English.

निःशुल्क मौलिक अध्ययन सामग्री। हिंदी व्याख्या सीखने में सहायता करती है; GATE परीक्षा अंग्रेज़ी में होती है।

Weighted percentages and data cases

What you will learn

A group rate describes successes, defects or ingredient mass relative to that group's own base. To combine groups, return to the underlying amounts. This lesson builds that method, shows when averaging rates is justified, and connects a table, a pie chart and count bars without silently changing the denominator.

You should be comfortable finding a percentage of a whole and distinguishing a percentage-point difference from relative percentage change. Throughout the examples, the given counts and percentages are exact unless a question says otherwise.

1 Recover amounts before combining rates

Suppose group i has a positive base w_i and a rate r_i written as a decimal. Its numerator is $w_i r_i$. Therefore:

Overall decimal rate = $(w_1 r_1 + w_2 r_2 + \dots) / (w_1 + w_2 + \dots)$.

Multiply the result by 100 to express it as a percentage. Alternatively, if P_i is the percentage number such as 80 rather than 0.80, the overall percentage number is $(w_1 P_1 + w_2 P_2 + \dots) / (w_1 + w_2 + \dots)$. Do not divide by 100 twice or mix the two conventions.

The weights are the denominators: people for a person-based success rate, units inspected for a defect rate, and total mass for a mass percentage. Do not multiply a success count by group size again. The success count has already accounted for the group size.

2 Check that aggregation means what you think it means

The groups must use the same rate definition and compatible units. Add disjoint groups, or explicitly account for overlap; counting the same person twice is not a combined rate over distinct people. If the observational unit is a trial and the question asks about all trials, repeated trials can be separate observations. Name the unit.

The total denominator must be positive. An empty group's own rate is undefined, not automatically zero. For a genuine part-within-whole rate, the numerator is between zero and its matching denominator, so the percentage lies from 0% to 100%. Relative increases are a different kind of comparison and can exceed 100%.

Use unrounded amounts when they are supplied. Rounding group rates early can change the final answer; a rounded displayed rate may not determine an exact whole-number numerator. The practice here supplies exact data so that ambiguity does not arise.

3 When can you average the rates directly?

Equal denominator weights guarantee the ordinary arithmetic mean for arbitrary group rates. If two equal-size groups have rates r and s , their combined rate is $(wr + ws) / (2w) = (r + s) / 2$.

Equal weights are sufficient, but not necessary in every case. If both groups have the same rate, say 30%, every weighted combination of them also has rate 30%, whatever their positive sizes. With more groups, other coincidences can occur: rates 20%, 50%, 80% with sizes 10, 20, 10 give $(2 + 10 + 8)/40 = 50\%$, also their simple mean. These exceptions do not make unweighted averaging a safe default. Recover amounts or justify the weights.

4 Bounds and missing information

An overall rate with positive weights lies between the smallest and largest group rates. It is strictly between the extremes when the groups include genuinely different rates and all their weights are positive. If every rate is the same, the combined rate equals it. The bound is a check, not a substitute for an exact calculation.

Knowing only two different group rates does not determine the overall rate. For example, 20% and 80% can combine to 50% with equal sizes, but to 65% when the 80% group is three times as large. The missing information is the relative group size; a ratio of sizes is enough even when absolute counts are unknown.

5 Changing composition can change the overall rate

A total can improve because the higher-rate group receives more weight, even if neither group's own rate improves. Compare both the within-group rates and the group sizes before drawing a conclusion. An aggregate change alone is not proof of individual improvement, nor does it by itself establish a cause.

Also separate counts from rates across time. More successful units can accompany a lower success rate when the number of units attempted grows faster. Calculate the two ratios before comparing them; use percentage points for their difference.

6 Read the display and keep its denominator

A table can show counts, rates or both. Read each column heading: "unused as a percentage of its own allocation" has a different denominator from "share of all allocated tickets". Totals of counts can be added; percentages from different group bases must not be added as though they partitioned one whole.

A pie chart divides one specified whole into disjoint, exhaustive shares. Sector angle = share $\times 360^\circ$. If a sector is 40% of all tickets, its angle is 144° and its count is $0.40 \times$ the total. The number 40 does not mean that 40% of the sector's own tickets were unused.

A count bar starts at zero and its height represents the displayed number of items. In a stacked count bar, segment counts add to the bar's total. A taller unused segment means more unused tickets, not necessarily a higher within-group unused percentage. Divide by the appropriate bar total to get that rate. A 100% stacked bar, in contrast, gives equal-height totals and cannot alone show unequal group sizes.

To transform representations: read the whole and shares from the pie; recover group counts; apply each within-group rate; put those counts in a table or stacked count bars; then check that every group and grand total still match. The worked ticket case below performs each step.

A four-step method

1. Identify a consistent numerator and its matching base for every group.
2. Recover the numerator amounts and put them in common units.
3. Add numerators and bases separately, then divide.
4. Check bounds, total consistency, the display's labels and any change in composition.

Six worked cases

Worked example 1

In one class, 30 students take a test and 80% pass. In another, 70 take it and 60% pass. Find the combined pass percentage.

1. Class 1 contributes $30 \times 0.80 = 24$ passes. Class 2 contributes $70 \times 0.60 = 42$.
2. Together there are $24 + 42 = 66$ passes among $30 + 70 = 100$ candidates. Overall = $66/100 \times 100 = 66\%$.
3. The larger class has the lower rate and receives more weight. An unweighted mean of 80% and 60% would be 70%.

Answer: 66%

Check and trap: 66% lies between 60% and 80% and nearer 60%. Do not multiply the 24 passes by 30 again.

Worked example 2

A factory reports 24 defective units among 600 units in one month and 30 among 1000 the next. Find both monthly rates and the combined rate.

1. First rate = $24/600 \times 100 = 4\%$; second = $30/1000 \times 100 = 3\%$.
2. The defect count rises from 24 to 30, but its rate falls by 1 percentage point because the total inspected increases more.
3. Combined rate = $(24 + 30)/(600 + 1000) \times 100 = 54/1600 \times 100 = 3.375\%$.

Answer: 4%, 3%; combined 3.375%

Check and trap: 3.375% is between 3% and 4% and closer to the larger batch's 3%. The simple mean 3.5% assigns equal weight to unequal batches.

Worked example 3

A non-reacting mixture combines 200 g of material containing 30% of an ingredient by mass with 300 g containing 10%. Assume no mass is lost. Find the ingredient percentage.

1. Ingredient mass from the first portion = $200 \times 0.30 = 60$ g. From the second = $300 \times 0.10 = 30$ g.
2. Total ingredient = 90 g; total mixture = $200 + 300 = 500$ g.
3. Mass percentage = $90/500 \times 100 = 18\%$.

Answer: 18% by mass

Check and trap: The total mass is the weight, not the portion count “two”. The answer is between 10% and 30%. The no-reaction/no-loss assumptions permit adding these masses; no practical mixing is required.

Worked example 4

Two nonempty groups have success rates 60% and 80%. Can their combined success rate be 55%? Explain without choosing group sizes.

1. Let the positive sizes be n and m . Combined decimal rate is $(0.60n + 0.80m)/(n + m)$.
2. Rewrite it as $0.60 + 0.20m/(n + m)$. Since $0 < m/(n + m) < 1$, the result is strictly between 0.60 and 0.80.
3. 55% is below the lower bound, so it is impossible under the complete disjoint-group model.

Answer: No

Check and trap: We can reject 55% without knowing $n:m$, but cannot identify the exact combined rate without that relative size.

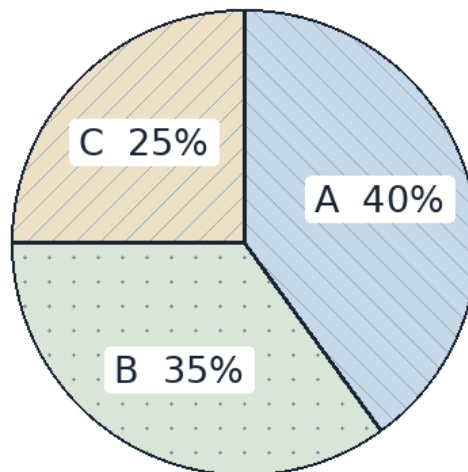
Worked example 5

An event allocates 800 tickets: A gets 40%, B gets 35%, C gets 25%. A leaves 10% of its allocation unused, B 20%, C 5%. How many tickets are used?

One dataset in three forms

Allocation of 800 tickets

Whole = all allocated tickets



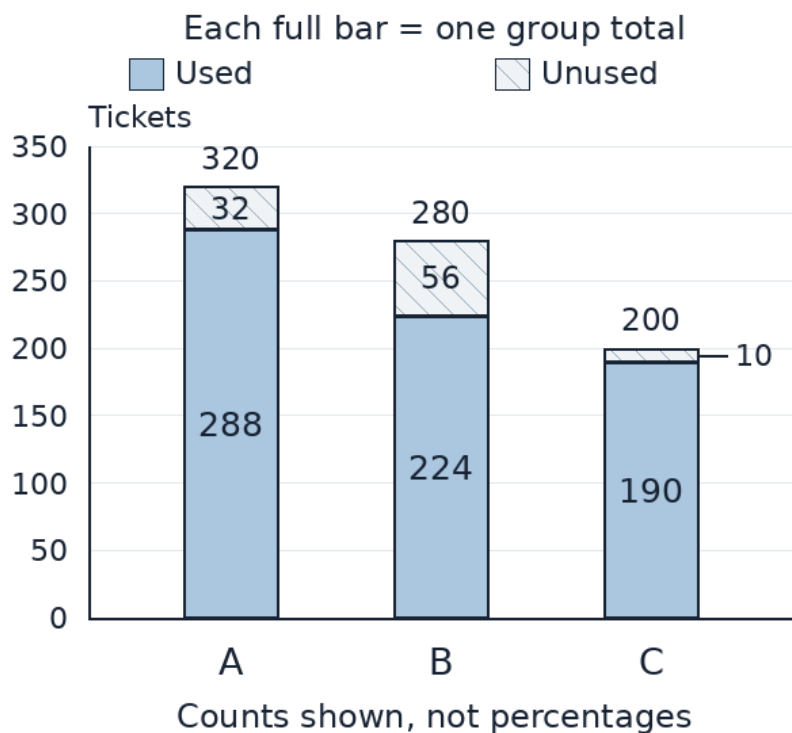
The three shares total 100%

Read each group's unused rate separately

Text equivalent: of all 800 allocated tickets, A receives 40%, B 35% and C 25%. The pie angles are 144° , 126° and 90° respectively.

Group	Allocated tickets	Unused as % of own allocation	Unused tickets	Used tickets
A	320	10%	32	288
B	280	20%	56	224
C	200	5%	10	190
Total	800	Do not sum this column	98	702

Ticket counts within each allocation



Text equivalent: A has 288 used plus 32 unused tickets, total 320. B has 224 plus 56, total 280. C has 190 plus 10, total 200. The vertical axis counts tickets from zero in steps of 50; it is not a percent axis. A's taller full bar reflects more allocated tickets. B's unused fraction is $56/280 = 20\%$, while A's is $32/320 = 10\%$.

1. Read the whole from the pie: 800 allocated tickets. The shares give $A = 0.40 \times 800 = 320$, $B = 280$, $C = 200$. The matching sector angles are 144° , 126° and 90° ; their sum is 360° .
2. The unused rates apply within each allocation. Unused counts are $0.10 \times 320 = 32$, $0.20 \times 280 = 56$ and $0.05 \times 200 = 10$.
3. Subtract within each group: used counts are 288, 224 and 190. Put these at the bottom of the stacked bars and the unused counts above them. The three full heights must remain 320, 280 and 200.
4. Total unused = 98 and total used = 702. Overall unused rate = $98/800 \times 100 = 12.25\%$; used rate = 87.75% .

Answer: 702 tickets used

Check and trap: The allocation shares sum to 100%. The within-group unused rates 10%, 20%, 5% do not partition one common whole and must not be added or directly averaged. The count check is $702 + 98 = 800$.

Worked example 6

Two lines keep fixed success rates $A=90\%$, $B=60\%$. Last week A handled 100 jobs and B 300; this week A handles 300 and B 100. Find both overall rates and explain the change.

1. Last week: successes = $100 \times 0.90 + 300 \times 0.60 = 270$ of 400, so 67.5%.
2. This week: successes = $300 \times 0.90 + 100 \times 0.60 = 330$ of 400, so 82.5%.
3. The overall rate increases by $82.5 - 67.5 = 15$ percentage points. A now handles a larger share, but both line-specific rates are unchanged.

Answer: 67.5% then 82.5%; +15 percentage points

Check and trap: Both overall rates stay between 60% and 90%. The data support a composition explanation; they do not show either line becoming more effective.

Ten fresh practice questions

Try the questions before the solutions. Select all correct options only where instructed. For numeric answers, enter the requested percentage number. All chart facts are also given in the text alternatives.

Practice question 1

Two disjoint inspection teams check different units using the same pass criterion. Team A checks 40 units with 60% passing; B checks 160 with 85% passing. Enter the overall pass percentage.

Practice question 2

Three disjoint batches contain 50, 150 and 300 items. Their acceptance rates under one common criterion are 40%, 60% and 90%. Which combined acceptance percentage is correct?

- A. $63\frac{1}{3}\%$
- B. 76%
- C. 90%
- D. 190%

Practice question 3

For nonempty disjoint groups with the same definition of success, select all true statements.

- A. Equal group sizes guarantee that the simple average of group rates equals the combined rate
- B. If every group has a 75% rate, the combined rate is 75% even when their sizes differ
- C. Unequal group sizes always make the simple average different from the combined rate
- D. Success counts should be multiplied by group sizes again before adding

Practice question 4

A table records morning: 200 attempts, 150 successes; evening: 400 attempts, 260 successes. Which statement compares the two periods correctly?

Period	Attempts	Successes
Morning	200	150
Evening	400	260

- A. Successes rose and the success rate rose
- B. Successes fell but the success rate rose
- C. Successes rose by 110 while the success rate fell by 10 percentage points
- D. The success rate fell by 10% relative to its old rate

Practice question 5

Two non-overlapping periods record 36 rejected units out of 450, then 18 rejected out of 150. What is the combined rejection percentage? Enter the percentage number.

Period	Inspected units	Rejected units
1	450	36
2	150	18

Practice question 6

Two nonempty disjoint groups have rates 20% and 80%, but neither their sizes nor a size ratio is given. What can be concluded about their combined rate?

- A. It must be 50%
- B. It is strictly between 20% and 80%, but its exact value is not determined
- C. It is at least 80%
- D. Even knowing the size ratio would not be enough

Practice question 7

Two lines keep rates $A = 60\%$ and $B = 80\%$. In period 1 they handle 75 and 25 jobs; in period 2 they handle 25 and 75 jobs. All jobs are disjoint and counted by the same criterion. Select all true statements.

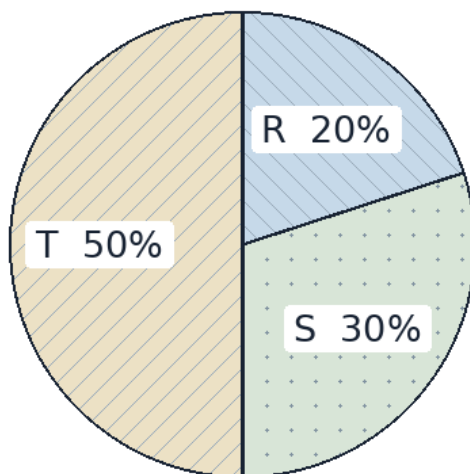
- A. The overall rate is 65% in period 1 and 75% in period 2
- B. Both lines improved their own success rates
- C. The overall increase is 10 percentage points
- D. More weight moved to the higher-rate line, which explains the aggregate change under the stated data

Practice question 8

Use the practice allocation pie and the unused-rate table below. How many tickets allocated to T were used?

Allocation of 1000 tickets

Whole = all allocated tickets



The three shares total 100%

Read each group's unused rate separately

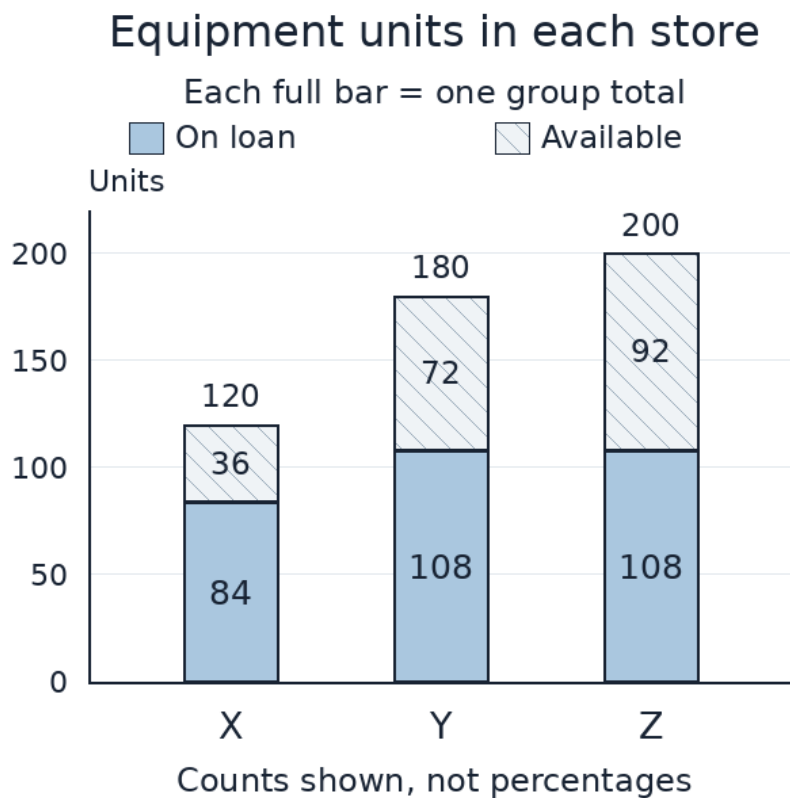
Text equivalent: Allocation pie: the whole is 1000 tickets. R receives 20%, S 30%, T 50%. The separate table gives unused rates within each own allocation: R 15%, S 10%, T 4%.

Group	Unused as % of its own allocation
R	15%
S	10%
T	4%

- A. 20
- B. 480
- C. 500
- D. 960

Practice question 9

Use the equipment count bars below. Across all three stores, what percentage of units are available rather than on loan? Enter the percentage number.



Text equivalent: Stacked count bars from zero. Store X: 84 on loan and 36 available, total 120. Y: 108 on loan and 72 available, total 180. Z: 108 on loan and 92 available, total 200. Categories are disjoint and exhaustive within each store.

Practice question 10

A table shows Team P: 150 allocated passes, 120 used; Team Q: 450 allocated passes, 180 used. A new pie chart is to show shares of all used passes. Which P and Q percentages belong in that pie?

Team	Allocated passes	Used passes
P	150	120
Q	450	180

- A. 25%, 75%
- B. 80%, 40%
- C. 40%, 60%
- D. 20%, 30%

Practice solutions

Solution 1

Answer: 80

Passes = $40 \times 0.60 + 160 \times 0.85 = 24 + 136 = 160$. Total inspected = 200, so $160/200 \times 100 = 80\%$. The simple mean 72.5% ignores B's fourfold weight.

Solution 2

Answer: B

Accepted counts are 20, 90 and 270; total 380 of 500. The rate is 76%. The largest batch, at 90%, has the greatest weight.

- A: A averages the three rates without their bases.
- B: B adds accepted counts and divides by all items.
- C: C uses only the largest batch rate.
- D: D adds percentages that apply to different groups.

Solution 3

Answer: A, B

Equal sizes give equal denominator weights. Identical rates also remain unchanged by weighting. Thus equal weights are a sufficient condition, not a necessary condition in every individual case. Counts already incorporate their group sizes.

- A: A follows by cancelling the common weight.
- B: B follows by factoring 0.75 out of the total numerator.
- C: C is disproved by B.
- D: D applies the weights twice and changes the meaning of the numerator.

Solution 4

Answer: C

The rates are $150/200 = 75\%$ and $260/400 = 65\%$. Counts rise by 110 while the rate drops 10 percentage points. Its relative fall is $10/75 \times 100 = 13\frac{1}{3}\%$, not 10%.

- A: A mistakes a count increase for a rate increase.
- B: B reverses both directions.
- C: C compares the matching rates and counts correctly.
- D: D confuses percentage points with relative percent.

Solution 5

Answer: 9

The period rates are 8% and 12%. Add rejected units and inspected units: $(36 + 18)/(450 + 150) \times 100 = 54/600 \times 100 = 9\%$. It is nearer 8% because the first period has three times the units.

Solution 6

Answer: B

Positive weights with distinct rates give a strict interior bound. Equal weights give 50%; weights 1:3 give 65%, so a unique answer is not determined. A size ratio would fix the weights up to a common factor, which cancels.

- A: A silently assumes equal group sizes.
- B: B states the valid bound and the missing information.
- C: C violates the upper bound.
- D: D ignores cancellation of a common scale factor.

Solution 7

Answer: A, C, D

Period 1 has $45 + 20 = 65$ successes of 100. Period 2 has $15 + 60 = 75$ of 100. The group rates remain exactly 60% and 80%; only their weights change.

- A: A uses both period-specific weights correctly.
- B: B contradicts the fixed rates given.
- C: C is the difference between 75% and 65%.
- D: D identifies the supported composition mechanism without claiming individual improvement.

Solution 8

Answer: B

The pie shows T receives 50% of all 1000 tickets, so its allocation is 500. The table says 4% of T's own allocation is unused: $0.04 \times 500 = 20$. Used = $500 - 20 = 480$.

- A: A is the unused count in T.
- B: B uses the two nested bases correctly.
- C: C is T's allocation before removing unused tickets.
- D: D applies 96% to all 1000 instead of to T's allocation.

Solution 9

Answer: 40

Read the available segments: $36 + 72 + 92 = 200$. Full bar totals are 120, 180 and 200, giving 500 units. Overall available = $200/500 \times 100 = 40\%$. Averaging the three within-store rates 30%, 40% and 46% would weight unequal stores equally.

Solution 10

Answer: C

The new whole is all used passes: $120 + 180 = 300$. P's share is $120/300 = 40\%$ and Q's is $180/300 = 60\%$. The denominator changes with the stated chart purpose.

- A: A shows shares of all allocated passes, a different whole.
- B: B shows each team's own usage rate; the two rates are not a partition.
- C: C uses the common whole of 300 used passes and sums to 100%.
- D: D divides each used count by all 600 allocated passes and omits the unused category.

Use mistakes to choose the next step

Questions 1-3: rebuild the weighted numerator and revisit when a simple mean works.

Questions 4-5: distinguish counts from rates and keep the period denominators. Question 6: name the missing weights rather than guessing. Question 7: compare group rates separately from composition. Questions 8-10: write the whole represented by each chart or table before calculating.

Analogy and its limits

Every item gets one vote

Imagine one token for every inspected unit: green for an accepted unit and grey for a rejected unit. Combining batches means putting all their tokens together. A batch of 300 contributes more tokens than a batch of 50, so their percentage labels do not deserve equal weight merely because there are two labels.

This picture explains count-based weighting. For a mass percentage, replace one token per item with equal small units of mass; do not weight by the number of containers. The analogy does not resolve overlapping records, different success definitions or missing data. It also does not claim that a higher aggregate proves every group improved: moving more tokens from a higher-rate group can change the pooled proportion while each group's rule stays fixed.

Quick reference

- Match each numerator with its own positive denominator
- Overall rate = total numerator/total matching denominator
- Weight decimal rates by their denominators, then divide by the total weight
- Equal weights guarantee the simple mean; identical rates and other coincidences show equal weights are not always necessary
- With positive weights, the pooled rate lies within the component extremes; distinct rates give a strict interior result
- Unknown relative group sizes generally mean an unknown exact pooled rate
- Compare within-group rates and composition separately
- A pie divides one named whole; a stacked count bar adds segment counts from a zero baseline
- Allocation share, within-group usage rate and share of all used items can have different denominators
- Do not add overlapping groups or incompatible units/definitions without an explicit model

Concept references: [OpenStax Introductory Statistics 2e, section 2.5](#), frequency-weighted mean; [section 1.2](#), categorical counts, percentages, pies and bars. The pooled-rate identity is derived here from the actual numerator and denominator.

भारित प्रतिशत और आँकड़ों के प्रश्न

आप क्या सीखेंगे

किसी समूह की दर सफलताओं, दोषपूर्ण इकाइयों या किसी घटक के द्रव्यमान को उसी समूह के आधार से तुलना करती है। समूहों को मिलाने के लिए पहले वास्तविक मात्राओं पर लौटें। इस पाठ में यही विधि, दरों का साधारण औसत कब उचित है, और तुलना का आधार अनजाने में बदले बिना तालिका, वृत्त-आरेख तथा संख्या-स्तंभों के बीच जाना सीखेंगे।

आपको पूरी मात्रा का कोई प्रतिशत निकालना और प्रतिशत-अंक के अंतर को सापेक्ष प्रतिशत परिवर्तन से अलग करना आना चाहिए। उदाहरणों में दी गई गिनतियाँ और प्रतिशत सटीक हैं, जब तक प्रश्न कोई दूसरी बात न कहे।

1 मिलाने से पहले वास्तविक मात्राएँ निकालें

मानें समूह i का धनात्मक आधार w_i और दशमलव में दर r_i है। उसका अंश $w_i r_i$ होगा। इसलिए:

$$\text{कुल दशमलव दर} = (w_1 r_1 + w_2 r_2 + \dots) / (w_1 + w_2 + \dots)$$

प्रतिशत के लिए इसे 100 से गुणा करें। यदि P_1 में 0.80 के बजाय प्रतिशत संख्या 80 लिखी हो, तो कुल प्रतिशत संख्या $(w_1 P_1 + w_2 P_2 + \dots) / (w_1 + w_2 + \dots)$ होगी। 100 से दो बार भाग न दें और दोनों तरीकों को आपस में न मिलाएँ।

भार वे मात्राएँ हैं जो हर में आती हैं: व्यक्ति-आधारित सफलता-दर में लोग, दोष-दर में जाँची गई इकाइयाँ और द्रव्यमान प्रतिशत में कुल द्रव्यमान। सफलता की गिनती को फिर से समूह के आकार से गुणा न करें। उस गिनती में समूह का आकार पहले ही शामिल है।

2 जाँचें कि समूहों को मिलाना सही अर्थ दे रहा है

समूहों में दर की परिभाषा समान और इकाइयाँ संगत होनी चाहिए। अलग-अलग समूह जोड़ें या उनके साझा सदस्यों का स्पष्ट हिसाब रखें; एक व्यक्ति को दो बार गिनना अलग व्यक्तियों की कुल दर नहीं है। यदि प्रेक्षण की इकाई एक प्रयास है और प्रश्न सभी प्रयासों की दर पूछता है, तो दोहराए गए प्रयास अलग प्रेक्षण हो सकते हैं। इकाई स्पष्ट लिखें।

कुल हर धनात्मक होना चाहिए। खाली समूह की अपनी दर परिभाषित नहीं होती; उसे अपने-आप शून्य न मानें। पूरी मात्रा के भीतर किसी वास्तविक भाग की दर में अंश शून्य से उसके संबंधित हर के बीच है, इसलिए प्रतिशत 0% से 100% तक होगा। सापेक्ष बढ़ोतरी अलग प्रकार की तुलना है और 100% से अधिक हो सकती है।

वास्तविक मात्राएँ दी हों तो बिना समय से पहले पूर्णांकन किए उनका उपयोग करें। समूह की दरें पहले पूर्णांक करने से अंतिम उत्तर बदल सकता है; दिखाई गई पूर्णांकित दर से हमेशा सटीक पूर्णांक गिनती नहीं मिलती। यहाँ अभ्यास के आँकड़े सटीक हैं, इसलिए वह अस्पष्टता नहीं है।

3 दरों का सीधा औसत कब ले सकते हैं?

सभी हर-भार बराबर हों तो किसी भी समूह-दरों के लिए साधारण अंकगणितीय औसत सही है। समान आकार w वाले दो समूहों की दर r और s हो, तो कुल दर $(wr + ws) / (2w) = (r + s) / 2$ है।

बराबर भार पर्याप्त शर्त हैं, लेकिन हर स्थिति में आवश्यक नहीं। दोनों समूहों की दर समान, मान लें 30%, हो तो किसी भी धनात्मक आकारों पर कुल दर 30% ही होगी। अधिक समूहों में अन्य संयोग भी हो सकते हैं: 20%, 50%, 80% दरों और 10, 20, 10 आकारों पर $(2 + 10 + 8) / 40 = 50\%$ मिलता है, जो साधारण औसत भी है। इन अपवादों के कारण बिना जाँच साधारण औसत लेना सही नियम नहीं बन जाता। वास्तविक मात्राएँ निकालें या भारों का औचित्य बताएँ।

4 सीमाएँ और अधूरी जानकारी

धनात्मक भारों वाली कुल दर सबसे छोटी और सबसे बड़ी समूह-दर के बीच होगी। समूहों की दरें सचमुच अलग हों और सभी भार धनात्मक हों, तो वह दोनों चरम मानों के सख्ती से भीतर होगी। सभी दरें समान हों तो कुल दर वही होगी। सीमा उत्तर की जाँच है, सटीक गणना का विकल्प नहीं।

केवल दो अलग समूह-दरें जानने से कुल दर नहीं मिलती। उदाहरण के लिए, 20% और 80% दरें बराबर आकार पर 50% देती हैं; लेकिन 80% वाले समूह का आकार तीन गुना हो तो कुल दर 65% है। यहाँ आकारों की तुलना गायब है; वास्तविक गिनतियाँ न होने पर भी आकारों का अनुपात पर्याप्त हो सकता है।

5 समूहों का अनुपात बदलने से कुल दर बदल सकती है

ऊँची दर वाले समूह का भार बढ़ने से कुल दर बढ़ सकती है, भले किसी समूह की अपनी दर न बढ़े। निष्कर्ष निकालने से पहले समूहों की दरें और आकार दोनों देखें। केवल कुल दर का बदलना हर व्यक्ति के सुधार का प्रमाण नहीं है और उससे कारण भी अपने-आप सिद्ध नहीं होता।

समय की तुलना में गिनती और दर भी अलग रखें। प्रयासों की संख्या अधिक तेजी से बढ़े तो सफल इकाइयों की गिनती बढ़ने के साथ सफलता-दर घट सकती है। पहले दोनों अनुपात निकालें; उनके अंतर के लिए प्रतिशत अंक लिखें।

6 चित्र पढ़ें और उसका हर बनाए रखें

तालिका में गिनती, दर या दोनों हो सकते हैं। हर स्तंभ का शीर्षक पढ़ें: “अपने आवंटन का अप्रयुक्त प्रतिशत” और “सभी आवंटित टिकटों में हिस्सा” के हर अलग हैं। गिनतियाँ जोड़ी जा सकती हैं; अलग समूह-आधार वाले प्रतिशतों को एक ही पूरी मात्रा के हिस्सों की तरह न जोड़ें।

वृत्त-आरेख किसी एक बताई पूरी मात्रा को अलग-अलग और सभी हिस्सों में बाँटता है। आरेख के हिस्से का कोण = हिस्सा $\times$ 360° । सभी टिकटों का 40% हिस्सा 144° होगा और उसकी गिनती $0.40 \times$ कुल टिकट होगी। 40 का अर्थ यह नहीं कि उस समूह के अपने टिकटों में 40% अप्रयुक्त रहे।

संख्या-स्तंभ शून्य से शुरू होता है और उसकी ऊँचाई वस्तुओं की गिनती बताती है। परतदार संख्या-स्तंभ में हिस्सों की गिनती जोड़ने से पूरे स्तंभ की गिनती मिलती है। अप्रयुक्त हिस्सा अधिक ऊँचा होने का अर्थ अधिक अप्रयुक्त टिकट है; अपने समूह का अप्रयुक्त प्रतिशत भी अधिक हो, यह जरूरी नहीं। उस दर के लिए संबंधित पूरे स्तंभ की गिनती से भाग दें। इसके विपरीत 100% परतदार स्तंभों की कुल ऊँचाई समान होती है; वे अकेले असमान समूह-आकार नहीं बताते।

रूप बदलने के लिए: वृत्त-आरेख का कुल और हिस्से पढ़ें; हर समूह की गिनती निकालें; उसकी अपनी दर लगाएँ; इन गिनतियों की तालिका या परतदार संख्या-स्तंभ बनाएँ; फिर समूहों और पूरे आँकड़ों का कुल मिलाएँ। नीचे टिकटों का हल किया उदाहरण हर चरण दिखाता है।

चार चरणों की विधि

1. हर समूह में समान अर्थ का अंश और उसका सही आधार पहचानें।
2. वास्तविक अंश-मात्राएँ निकालकर समान इकाइयों में लिखें।
3. अंशों और आधारों को अलग-अलग जोड़कर भाग दें।
4. सीमा, कुल, चित्र के शीर्षक और समूहों के अनुपात में बदलाव की जाँच करें।

छह हल किए हुए उदाहरण

हल किया उदाहरण 1

एक कक्षा में 30 विद्यार्थी परीक्षा देते हैं और 80% पास होते हैं। दूसरी में 70 विद्यार्थी परीक्षा देते हैं और 60% पास होते हैं। दोनों को मिलाकर पास होने का प्रतिशत क्या है?

1. पहली कक्षा में $30 \times 0.80 = 24$ विद्यार्थी पास हैं। दूसरी में $70 \times 0.60 = 42$ पास हैं।
2. कुल $30 + 70 = 100$ विद्यार्थियों में $24 + 42 = 66$ पास हैं। कुल प्रतिशत $= 66/100 \times 100 = 66\%$ ।
3. बड़ी कक्षा की दर कम है और उसका भार अधिक है। 80% तथा 60% का साधारण औसत 70% होगा।

उत्तर: 66%

जाँच और सावधानी: 66%, 60% और 80% के बीच तथा 60% के अधिक निकट है। 24 पास विद्यार्थियों को फिर से 30 से गुणा न करें।

हल किया उदाहरण 2

एक महीने में 600 इकाइयों में 24 दोषपूर्ण हैं। अगले महीने में 1000 में 30 दोषपूर्ण हैं। दोनों महीनों की अलग दरें और संयुक्त दोष-दर निकालें।

1. पहली दर $= 24/600 \times 100 = 4\%$; दूसरी $= 30/1000 \times 100 = 3\%$ ।
2. दोषपूर्ण इकाइयों की गिनती 24 से 30 बढ़ी, लेकिन जाँची कुल इकाइयाँ अधिक तेजी से बढ़ने पर दर 1 प्रतिशत अंक घटी।
3. संयुक्त दर $= (24 + 30)/(600 + 1000) \times 100 = 54/1600 \times 100 = 3.375\%$ ।

उत्तर: 4%, 3%; संयुक्त 3.375%

जाँच और सावधानी: 3.375%, 3% और 4% के बीच तथा बड़े बैच के 3% के निकट है। साधारण औसत 3.5% असमान बैचों को बराबर भार देता है।

हल किया उदाहरण 3

200 g पदार्थ में किसी घटक का द्रव्यमान प्रतिशत 30% और 300 g पदार्थ में 10% है। दोनों को बिना अभिक्रिया और बिना द्रव्यमान हानि के मिलाया जाता है। मिश्रण में घटक का द्रव्यमान प्रतिशत क्या होगा?

1. पहले भाग से घटक का द्रव्यमान $200 \times 0.30 = 60$ g और दूसरे से $300 \times 0.10 = 30$ g है।
2. कुल घटक 90 g और कुल मिश्रण $200 + 300 = 500$ g है।
3. द्रव्यमान प्रतिशत $= 90/500 \times 100 = 18\%$ ।

उत्तर: द्रव्यमान के अनुसार 18%

जाँच और सावधानी: भार कुल द्रव्यमान है, “दो” भागों की गिनती नहीं। उत्तर 10% और 30% के बीच है। बिना अभिक्रिया/हानि की शर्त से द्रव्यमान जोड़े जा सकते हैं; वास्तविक पदार्थ मिलाने की जरूरत नहीं है।

हल किया उदाहरण 4

दो गैर-खाली समूहों की सफलता-दरें 60% और 80% हैं। क्या संयुक्त दर 55% हो सकती है? समूहों के आकार चुने बिना समझाएँ।

1. धनात्मक आकार n और m लें। संयुक्त दशमलव दर $(0.60n + 0.80m)/(n + m)$ है।
2. इसे $0.60 + 0.20m/(n + m)$ लिखें। $0 < m/(n + m) < 1$ होने से उत्तर 0.60 और 0.80 के सख्ती से भीतर है।
3. 55% निचली सीमा से भी कम है, इसलिए पूर्ण अलग-अलग समूहों के इस मॉडल में संभव नहीं।

उत्तर: नहीं

जाँच और सावधानी: $n:m$ जाने बिना 55% को अस्वीकार कर सकते हैं, लेकिन आकारों का अनुपात जाने बिना सटीक संयुक्त दर नहीं बता सकते।

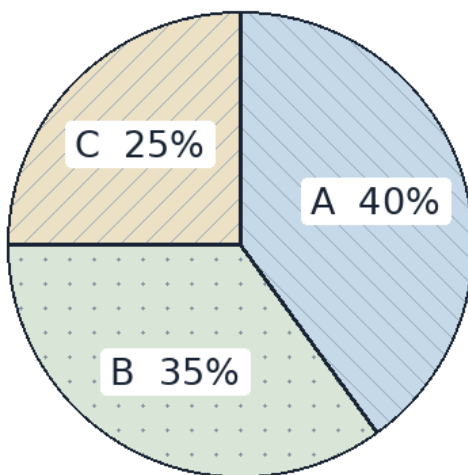
हल किया उदाहरण 5

एक आयोजन में 800 टिकट बाँटे जाते हैं: A को 40%, B को 35% और C को 25%। A अपने आवंटन का 10%, B 20% और C 5% इस्तेमाल नहीं करता। कुल कितने टिकट इस्तेमाल हुए?

एक आँकड़ा-समूह के तीन रूप

800 टिकटों का आवंटन

पूरी मात्रा = सभी आवंटित टिकट



तीनों हिस्से मिलकर 100% हैं

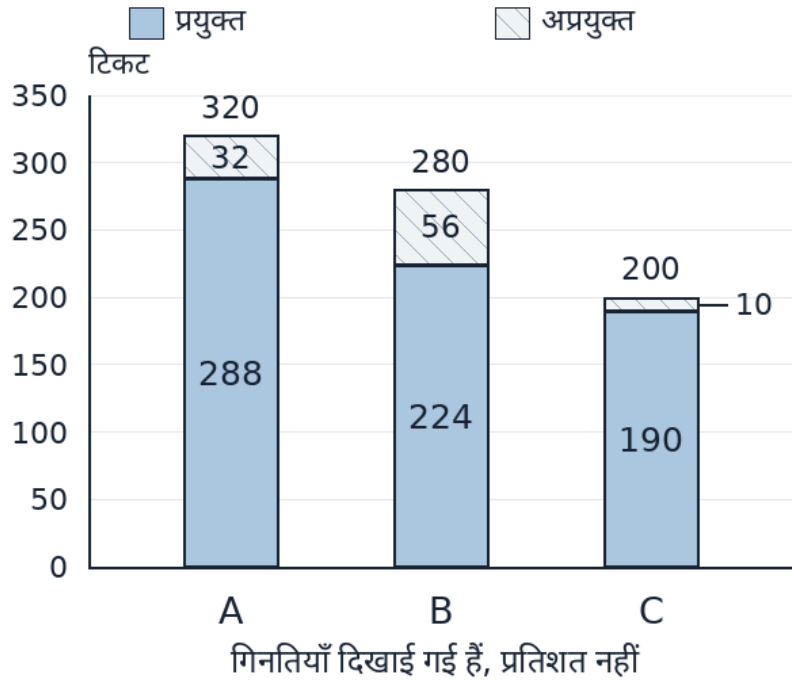
हर समूह की अप्रयुक्त दर अलग पढ़ें

पाठ रूप: सभी 800 आवंटित टिकटों में A को 40%, B को 35% और C को 25% मिलता है। संबंधित कोण 144° , 126° और 90° हैं।

समूह	आवंटित टिकट	अपने आवंटन का अप्रयुक्त प्रतिशत	अप्रयुक्त टिकट	प्रयुक्त टिकट
A	320	10%	32	288
B	280	20%	56	224
C	200	5%	10	190
कुल	800	यह स्तंभ न जोड़ें	98	702

आवंटन के भीतर टिकटों की गिनती

प्रत्येक स्तंभ = एक समूह का कुल



पाठ रूप: A में 288 प्रयुक्त और 32 अप्रयुक्त, कुल 320 टिकट हैं। B में 224 और 56, कुल 280 हैं। C में 190 और 10, कुल 200 हैं। लंबवत अक्ष टिकटों की गिनती शून्य से 50 के अंतर पर दिखाता है; यह प्रतिशत अक्ष नहीं है। A का बड़ा पूरा स्तंभ अधिक आवंटन बताता है। B का अप्रयुक्त भाग $56/280 = 20\%$ और A का $32/320 = 10\%$ है।

- वृत्त-आरेख की पूरी मात्रा 800 आवंटित टिकट है। हिस्सों से $A = 0.40 \times 800 = 320$, $B = 280$ और $C = 200$ मिलते हैं। संबंधित कोण 144° , 126° और 90° हैं; उनका योग 360° है।
- अप्रयुक्त दरें हर समूह के अपने आवंटन पर हैं। अप्रयुक्त गिनतियाँ $0.10 \times 320 = 32$, $0.20 \times 280 = 56$ और $0.05 \times 200 = 10$ हैं।
- हर समूह में घटाने से प्रयुक्त गिनतियाँ 288, 224 और 190 हैं। इन्हें परतदार स्तंभों में नीचे और अप्रयुक्त गिनतियों को ऊपर रखें। पूरी ऊँचाइयाँ फिर भी 320, 280 और 200 होनी चाहिए।
- कुल अप्रयुक्त 98 और कुल प्रयुक्त 702 हैं। कुल अप्रयुक्त दर $= 98/800 \times 100 = 12.25\%$; प्रयुक्त दर $= 87.75\%$ ।

उत्तर: 702 टिकट इस्तेमाल हुए

जाँच और सावधानी: आवंटन के हिस्से 100% होते हैं। समूहों की अपनी अप्रयुक्त दरें 10%, 20%, 5% एक साझा पूरी मात्रा के हिस्से नहीं हैं; इन्हें न सीधे जोड़ें, न साधारण औसत लें। गिनती की जाँच: $702 + 98 = 800$ ।

हल किया उदाहरण 6

दो उत्पादन लाइनों की सफलता-दरें स्थिर हैं: A की 90% और B की 60%। पिछले सप्ताह A ने 100 काम और B ने 300 किए। इस सप्ताह A ने 300 और B ने 100 किए। दोनों सप्ताह की कुल दर निकालें और परिवर्तन समझाएँ।

1. पिछले सप्ताह सफलता = $100 \times 0.90 + 300 \times 0.60 = 270$, कुल 400 में; इसलिए दर 67.5%।
2. इस सप्ताह सफलता = $300 \times 0.90 + 100 \times 0.60 = 330$, कुल 400 में; इसलिए दर 82.5%।
3. कुल दर $82.5 - 67.5 = 15$ प्रतिशत अंक बढ़ी। अब अधिक काम A के पास है, लेकिन दोनों लाइनों की अपनी दरें अपरिवर्तित हैं।

उत्तर: 67.5% से 82.5%; 15 प्रतिशत अंक बढ़ोतरी

जाँच और सावधानी: दोनों कुल दरें 60% और 90% के बीच हैं। आँकड़े काम के बँटवारे में बदलाव दिखाते हैं; वे किसी लाइन की अपनी कार्यक्षमता बढ़ना नहीं दिखाते।

दस नए अभ्यास प्रश्न

हल से पहले स्वयं प्रयास करें। सभी सही विकल्प केवल वहीं चुनें जहाँ ऐसा कहा गया है। संख्यात्मक उत्तर में माँगी प्रतिशत संख्या लिखें। चित्रों की सारी जानकारी पाठ रूप में भी दी गई है।

अभ्यास प्रश्न 1

दो निरीक्षण दल अलग-अलग इकाइयों को समान पास मानदंड से जाँचते हैं। A की 40 इकाइयों में 60% और B की 160 इकाइयों में 85% पास हैं। कुल पास प्रतिशत लिखें।

अभ्यास प्रश्न 2

तीन अलग-अलग बैचों में 50, 150 और 300 वस्तुएँ हैं। एक समान मानदंड पर उनकी स्वीकृति-दरें 40%, 60% और 90% हैं। संयुक्त स्वीकृति प्रतिशत क्या है?

- A. $63\frac{1}{3}\%$
- B. 76%
- C. 90%
- D. 190%

अभ्यास प्रश्न 3

सफलता की समान परिभाषा वाले गैर-खाली, अलग-अलग समूहों के लिए सभी सही कथन चुनें।

- A. बराबर समूह-आकार होने पर समूह-दरों का साधारण औसत संयुक्त दर के बराबर होता है
- B. हर समूह की दर 75% हो तो असमान आकारों पर भी संयुक्त दर 75% है
- C. असमान समूह-आकार होने पर साधारण औसत हमेशा संयुक्त दर से अलग होता है
- D. सफलता की गिनतियाँ जोड़ने से पहले उन्हें फिर से समूह-आकारों से गुणा करना चाहिए

अभ्यास प्रश्न 4

तालिका में सुबह 200 प्रयास और 150 सफलताएँ, शाम 400 प्रयास और 260 सफलताएँ हैं। दोनों अवधियों की सही तुलना कौन-सी है?

अवधि	प्रयास	सफलताएँ
सुबह	200	150
शाम	400	260

- A. सफलताएँ और सफलता-दर दोनों बढ़ीं
- B. सफलताएँ घटीं लेकिन सफलता-दर बढ़ी
- C. सफलताएँ 110 बढ़ीं लेकिन सफलता-दर 10 प्रतिशत अंक घटी
- D. सफलता-दर अपनी पुरानी दर से 10% घटी

अभ्यास प्रश्न 5

दो अलग अवधियों में पहले 450 में 36 इकाइयाँ अस्वीकृत और फिर 150 में 18 अस्वीकृत हैं। संयुक्त अस्वीकृति प्रतिशत कितना है? प्रतिशत संख्या लिखें।

अवधि	जाँची इकाइयाँ	अस्वीकृत इकाइयाँ
1	450	36
2	150	18

अभ्यास प्रश्न 6

दो गैर-खाली, अलग समूहों की दरें 20% और 80% हैं, लेकिन आकार या आकारों का अनुपात नहीं दिया है। संयुक्त दर के बारे में क्या कह सकते हैं?

- A. वह अनिवार्यतः 50% है
- B. वह 20% और 80% के सख्ती से बीच है, लेकिन सटीक मान निर्धारित नहीं है
- C. वह कम-से-कम 80% है
- D. आकारों का अनुपात जानना भी पर्याप्त नहीं होगा

अभ्यास प्रश्न 7

दो लाइनों की दरें $A = 60\%$ और $B = 80\%$ स्थिर हैं। अवधि 1 में उनके काम 75 और 25 हैं; अवधि 2 में 25 और 75 हैं। सभी काम अलग और समान मानदंड से गिने गए हैं। सभी सही कथन चुनें।

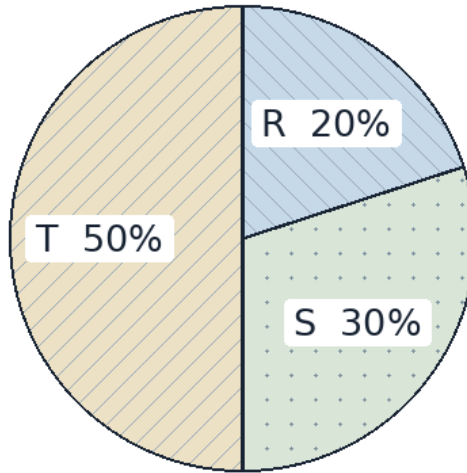
- A. अवधि 1 में कुल दर 65% और अवधि 2 में 75% है
- B. दोनों लाइनों की अपनी सफलता-दरें बढ़ीं
- C. कुल बढ़ोतरी 10 प्रतिशत अंक है
- D. अधिक भार ऊँची दर वाली लाइन को मिला; दिए आँकड़ों में इससे कुल परिवर्तन समझ आता है

अभ्यास प्रश्न 8

नीचे दिए अभ्यास के आवंटन वृत्त-आरेख और अप्रयुक्त दरों की तालिका का उपयोग करें। T को दिए कितने टिकट इस्तेमाल हुए?

1000 टिकटों का आवंटन

पूरी मात्रा = सभी आवंटित टिकट



तीनों हिस्से मिलकर 100% हैं

हर समूह की अप्रयुक्त दर अलग पढ़ें

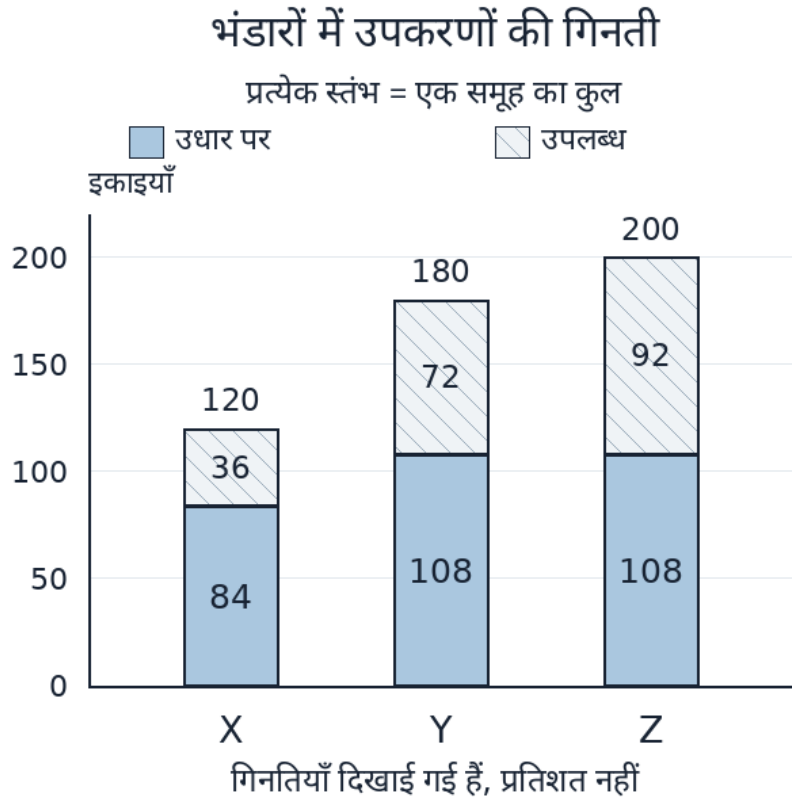
पाठ रूप: आवंटन वृत्त-आरेख: पूरी मात्रा 1000 टिकट है। R का हिस्सा 20%, S का 30% और T का 50% है। अलग तालिका में अपने आवंटन की अप्रयुक्त दरें R 15%, S 10%, T 4% हैं।

समूह	अपने आवंटन का अप्रयुक्त प्रतिशत
R	15%
S	10%
T	4%

- A. 20
- B. 480
- C. 500
- D. 960

अभ्यास प्रश्न 9

नीचे उपकरणों के संख्या-स्तंभ देखें। तीनों भंडारों में कुल इकाइयों का कितना प्रतिशत उधार पर होने के बजाय उपलब्ध है? प्रतिशत संख्या लिखें।



पाठ रूप: शून्य से शुरू परतदार संख्या-स्तंभ। X में 84 उधार पर और 36 उपलब्ध, कुल 120। Y में 108 उधार पर और 72 उपलब्ध, कुल 180। Z में 108 उधार पर और 92 उपलब्ध, कुल 200। हर भंडार की दोनों श्रेणियाँ अलग हैं और सभी इकाइयाँ उनमें आती हैं।

अभ्यास प्रश्न 10

तालिका में दल P को 150 प्रवेश-पास दिए गए और 120 इस्तेमाल हुए; दल Q को 450 दिए गए और 180 इस्तेमाल हुए। नया वृत्त-आरेख सभी इस्तेमाल हुए पासों में हिस्से दिखाएगा। उसमें P और Q के कौन-से प्रतिशत होंगे?

दल	आवंटित पास	प्रयुक्त पास
P	150	120
Q	450	180

- A. 25%, 75%
- B. 80%, 40%
- C. 40%, 60%
- D. 20%, 30%

अभ्यास के हल

हल 1

उत्तर: 80

पास गिनती = $40 \times 0.60 + 160 \times 0.85 = 24 + 136 = 160$ । कुल जाँच 200, इसलिए $160/200 \times 100 = 80\%$ ।
साधारण औसत 72.5%, B के चार गुना भार को अनदेखा करता है।

हल 2

उत्तर: B

स्वीकृत गिनतियाँ 20, 90 और 270 हैं; कुल 500 में 380। दर 76% है। 90% दर वाले सबसे बड़े बैच का भार सर्वाधिक है।

- A: A बिना आधारों के तीन दरों का औसत लेता है।
- B: B स्वीकृत गिनतियाँ जोड़कर सभी वस्तुओं से भाग देता है।
- C: C केवल सबसे बड़े बैच की दर लेता है।
- D: D अलग समूहों पर लागू प्रतिशतों को जोड़ता है।

हल 3

उत्तर: A, B

बराबर आकारों से हर के भार बराबर होते हैं। समान दरें भार लगाने पर भी वही रहती हैं। इसलिए बराबर भार पर्याप्त शर्त हैं, हर विशेष स्थिति में आवश्यक शर्त नहीं। गिनतियों में समूह-आकार पहले ही शामिल हैं।

- A: A में साझा भार काटा जा सकता है।
- B: B में कुल अंश से 0.75 साझा बाहर लिया जा सकता है।
- C: B, C का प्रतिउदाहरण है।
- D: D भार दो बार लगाकर अंश का अर्थ बदलता है।

हल 4

उत्तर: C

दरें $150/200 = 75\%$ और $260/400 = 65\%$ हैं। गिनती 110 बढ़ी, जबकि दर 10 प्रतिशत अंक घटी। सापेक्ष कमी $10/75 \times 100 = 13\frac{1}{3}\%$ है, 10% नहीं।

- A: A गिनती बढ़ने को दर बढ़ना मानता है।
- B: B दोनों दिशाएँ उलटता है।
- C: C संबंधित दरों और गिनतियों की सही तुलना है।
- D: D प्रतिशत अंक को सापेक्ष प्रतिशत मानता है।

हल 5

उत्तर: 9

अवधियों की दरें 8% और 12% हैं। अस्वीकृत और जाँची गई इकाइयाँ अलग जोड़ें: $(36 + 18)/(450 + 150) \times 100 = 54/600 \times 100 = 9\%$ । पहली अवधि में तीन गुना इकाइयाँ होने से उत्तर 8% के निकट है।

हल 6

उत्तर: B

अलग दरों के धनात्मक भारों से उत्तर चरम मानों के सख्ती से भीतर है। बराबर भार 50% और 1:3 भार 65% देते हैं, इसलिए एक उत्तर तय नहीं। आकारों का अनुपात भारों को साझा गुणक तक तय कर देगा; वह गुणक कट जाता है।

- A: A बिना आधार बराबर आकार मानता है।
- B: B सही सीमा और अनुपलब्ध जानकारी बताता है।
- C: C ऊपरी सीमा तोड़ता है।
- D: D साझा गुणक के कटने को अनदेखा करता है।

हल 7

उत्तर: A, C, D

अवधि 1 में 100 में $45 + 20 = 65$ सफलताएँ हैं। अवधि 2 में 100 में $15 + 60 = 75$ हैं। समूह-दरें ठीक 60% और 80% ही रहीं; केवल भार बदले।

- A: A दोनों अवधियों के सही भार उपयोग करता है।
- B: B दी गई स्थिर दरों के विपरीत है।
- C: C, 75% और 65% का अंतर है।
- D: D व्यक्तिगत सुधार का दावा किए बिना समूह-अनुपात का उचित कारण बताता है।

हल 8

उत्तर: B

वृत्त-आरेख से T को कुल 1000 का 50%, अर्थात् 500 टिकट मिलते हैं। तालिका में T के अपने आवंटन का 4% अप्रयुक्त है: $0.04 \times 500 = 20$ । प्रयुक्त = $500 - 20 = 480$ ।

- A: A, T की अप्रयुक्त गिनती है।
- B: B दोनों क्रमिक आधार सही रखता है।
- C: C अप्रयुक्त टिकट घटाने से पहले T का आवंटन है।
- D: D, 96% को T के हिस्से के बजाय पूरे 1000 पर लगाता है।

हल 9

उत्तर: 40

उपलब्ध हिस्से पढ़ें: $36 + 72 + 92 = 200$ । पूरे स्तंभों के कुल 120, 180 और 200 हैं, अर्थात् 500 इकाइयाँ। कुल उपलब्ध प्रतिशत = $200/500 \times 100 = 40\%$ । तीन भंडारों की दरें 30%, 40%, 46% सीधे औसत करने से असमान भंडारों को बराबर भार मिलेगा।

हल 10

उत्तर: C

नई पूरी मात्रा सभी इस्तेमाल हुए पास हैं: $120 + 180 = 300$ । P का हिस्सा $120/300 = 40\%$ और Q का $180/300 = 60\%$ है। चित्र का बताया उद्देश्य बदलने पर हर बदलता है।

- A: A सभी आवंटित पासों के हिस्से दिखाता है; पूरी मात्रा अलग है।
- B: B हर दल की अपनी उपयोग-दर है; ये एक पूरी मात्रा के हिस्से नहीं।
- C: C में साझा पूरी मात्रा 300 प्रयुक्त पास है और योग 100% है।
- D: D हर प्रयुक्त गिनती को सभी 600 आवंटित पासों से भाग देता है और अप्रयुक्त श्रेणी छोड़ता है।

गलती देखकर अगला कदम चुनें

प्रश्न 1-3: भारित अंश फिर बनाइए और साधारण औसत की शर्तें देखिए। प्रश्न 4-5: गिनती और दर अलग रखकर अवधियों के हर पहचानिए। प्रश्न 6: अनुमान लगाने के बजाय गायब भार बताइए। प्रश्न 7: समूह-दरों को समूह-अनुपात से अलग देखिए। प्रश्न 8-10: गणना से पहले हर चित्र या तालिका की पूरी मात्रा लिखिए।

उपमा और उसकी सीमाएँ

हर इकाई की एक गिनती

हर जाँची इकाई के लिए एक टोकन सोचें: स्वीकृत के लिए हरा और अस्वीकृत के लिए धूसर। बैचों को मिलाने का अर्थ उनके सभी टोकन एक साथ रखना है। 300 इकाइयों वाला बैच, 50 इकाइयों वाले बैच से अधिक टोकन देगा। केवल दो प्रतिशत-लेबल होने से उन्हें बराबर भार नहीं मिलता।

यह तस्वीर गिनती पर आधारित भार समझाती है। द्रव्यमान प्रतिशत में हर वस्तु के टोकन के बजाय द्रव्यमान की बराबर छोटी इकाइयाँ सोचें; डिब्बों की संख्या से भार न दें। उपमा दोहराए रिकॉर्ड, सफलता की अलग परिभाषाएँ या गायब आँकड़े ठीक नहीं कर सकती। वह यह भी नहीं कहती कि कुल दर बढ़ने पर हर समूह सुधरा: ऊँची दर वाले समूह के अधिक टोकन आने से मिली हुई दर बदल सकती है, जबकि हर समूह का नियम स्थिर रहे।

त्वरित संदर्भ

- हर अंश को उसके अपने धनात्मक हर से जोड़ें
- कुल दर = अंशों का कुल/संबंधित हरों का कुल
- दशमलव दरों को उनके हरों का भार दें, फिर कुल भार से भाग दें
- बराबर भार साधारण औसत की गारंटी हैं; समान दरें और अन्य संयोग दिखाते हैं कि बराबर भार हमेशा आवश्यक नहीं
- धनात्मक भारों में मिली हुई दर समूहों के चरम मानों के भीतर है; अलग दरों पर वह सख्ती से बीच में होगी
- समूह-आकारों का अनुपात अज्ञात हो तो सामान्यतः सटीक कुल दर भी अज्ञात है
- समूह की अपनी दर और समूहों के अनुपात का बदलाव अलग देखें
- वृत्त-आरेख एक बताई पूरी मात्रा बाँटता है; परतदार संख्या-स्तंभ शून्य से हिस्सों की गिनतियाँ जोड़ता है
- आवंटन का हिस्सा, अपने समूह की उपयोग-दर और सभी प्रयुक्त वस्तुओं में हिस्सा अलग हर रख सकते हैं
- साझा सदस्यों वाले समूह या असंगत इकाइयाँ/परिभाषाएँ स्पष्ट मॉडल बिना न जोड़ें

अवधारणा संदर्भ: [OpenStax Introductory Statistics 2e](#), खंड 2.5, आवृत्ति-भारित औसत; खंड 1.2, श्रेणीगत गिनतियाँ, प्रतिशत, वृत्त और स्तंभ आरेख। कुल दर का संबंध यहाँ वास्तविक अंश और हर से निकाला गया है।