Ratios, shares and proportional models

अनुपात, हिस्से और समानुपाती मॉडल

Ratios, percentages and proportional reasoning

अनुपात, प्रतिशत और समानुपाती तर्क

Read the explanations, try the examples and practice independently, then check the solutions.

व्याख्या पढ़ें, उदाहरण और अभ्यास स्वयं हल करें, फिर अपने तर्क को हल से जाँचें।

English teaching and practice

हिंदी पाठ और अभ्यास

Free original study material. Hindi explanations support learning; the GATE examination is conducted in English.

निःशुल्क मौलिक अध्ययन सामग्री। हिंदी व्याख्या सीखने में सहायता करती है; GATE परीक्षा अंग्रेज़ी में होती है।

Ratios, shares and proportional models

What this lesson helps you decide

A ratio tells us relative size. It does not usually tell us the actual amounts. A proportional model goes further: it says what stays unchanged when a quantity varies. Confusing these two ideas can give a neat calculation with an unjustified answer.

This lesson develops four connected skills: comparing like quantities in common units; recovering actual shares from a total or a difference; combining ratios through a common quantity; and deciding whether a constant quotient or a constant product describes a situation. You will also learn why a straight graph with a fixed offset is not a direct-proportion graph.

Before you begin

You need multiplication, division, equivalent fractions, decimal place value and simple unit conversion. Here is the small amount of algebra used throughout.

- Multiplying both terms of 2:5 by 3 gives 6:15, because 6/15 = 2/5. Multiplying just one term changes the comparison.
- To find 3/8 of 72, first find one eighth: 72 ÷ 8 = 9. Then take three such parts: 3 × 9 = 27.
- If 6k = 54, divide both sides by 6 to obtain k = 9. Substituting back gives 6 × 9 = 54.
- Since 1 km = 1000 m, 0.9 km = 900 m. Since 1 kg = 1000 g, 0.45 kg = 450 g. Conversion changes the numerical description, not the amount.
- A 25% increase means adding 25/100 of the original value: new = old × (1 + 25/100) = 1.25 × old. Percent change always needs its comparison base.

Check yourself: simplify 18:30; find 5/6 of 42; convert 0.32 L to mL. Answers: 3:5 after division by 6; 35 because 42 ÷ 6 × 5 = 35; 320 mL because 1 L = 1000 mL. If any step is unfamiliar, work it through before using a proportion shortcut.

A ratio compares quantities in a stated order

For positive amounts A and B, A:B = a:b means A/B = a/b. The order matters: A:B and B:A reverse the comparison. In this lesson share counts and scale factors are positive; any denominator used in division must be nonzero.

When A and B measure the same kind of quantity, convert them to the same unit first. Only then do the units cancel. For example, a length-to-length ratio is dimensionless after both lengths are expressed in metres. A length-to-time comparison is different: distance/time is a rate, so a unit such as m/s must remain. Do not convert unlike quantities into an imaginary common unit.

An equivalent ratio comes from multiplying or dividing every term by the same nonzero factor. It does not come from adding the same number. Thus 4:6 = 2:3, whereas adding 2 gives 6:8 = 3:4, a different relationship. With decimals, multiplying both terms by 10, 100 or another convenient common factor can first remove decimal places.

To test A/B = a/b without rounding, multiply both sides by Bb: Ab = Ba. This cross-product test is valid because B and b are nonzero. Keep the compared quantities in the same order; cross multiplication cannot repair a wrongly chosen model.

One shared scale factor turns a ratio into amounts

If A:B = a:b, write A = ak and B = bk. The same k represents the amount in one ratio part. The ratio cancels k, so many pairs share the same ratio. For 3:5, both 6:10 and 30:50 work. Without another piece of information, neither absolute amount is determined.

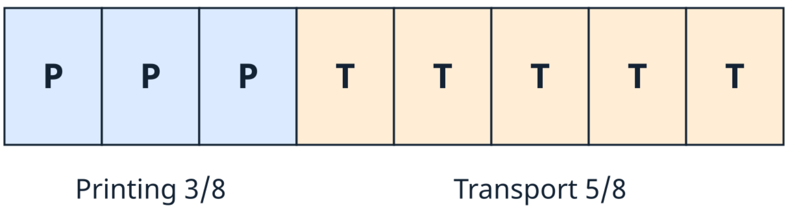
If A + B = T, then ak + bk = (a + b)k = T. Therefore k = T/(a + b), A = aT/(a + b) and B = bT/(a + b). The fractions of the whole are a/(a + b) and b/(a + b), not a/b and b/a.

A known difference can also set the scale. If B − A = D and b is greater than a, then (b − a)k = D and k = D/(b − a). If a = b, the amounts are equal and a nonzero stated difference is inconsistent. If only their ratio is given, do not invent a total or a difference.

For counts, the final amounts must also be possible whole numbers. A mathematically correct fractional share of money or length may be acceptable, but 3.5 indivisible components is not. Check the context after finding k.

Eight equal budget parts

Eight equal parts of the whole



Every part has the same value

Allocation	Number of equal parts	Fraction of the whole
Printing	3	3/8
Transport	5	5/8
Together	8	1

Caption: The eight parts have the same value. “3:5” compares the two allocations; “3/8” compares printing with the whole budget. The original diagram supplied with this panel shows three labelled P parts followed by five labelled T parts; the table carries the same information without colour.

Join two ratios by matching their shared quantity

Suppose A:B = a:b and B:C = c:d. The B in both statements is the same actual amount, even though one ratio assigns it b parts and the other assigns it c parts. Rescale the first ratio by c and the second by b. Both now give bc parts for B, so A:B:C = ac:bc:bd. A smaller common multiple may simplify the arithmetic; the shared amount must match either way.

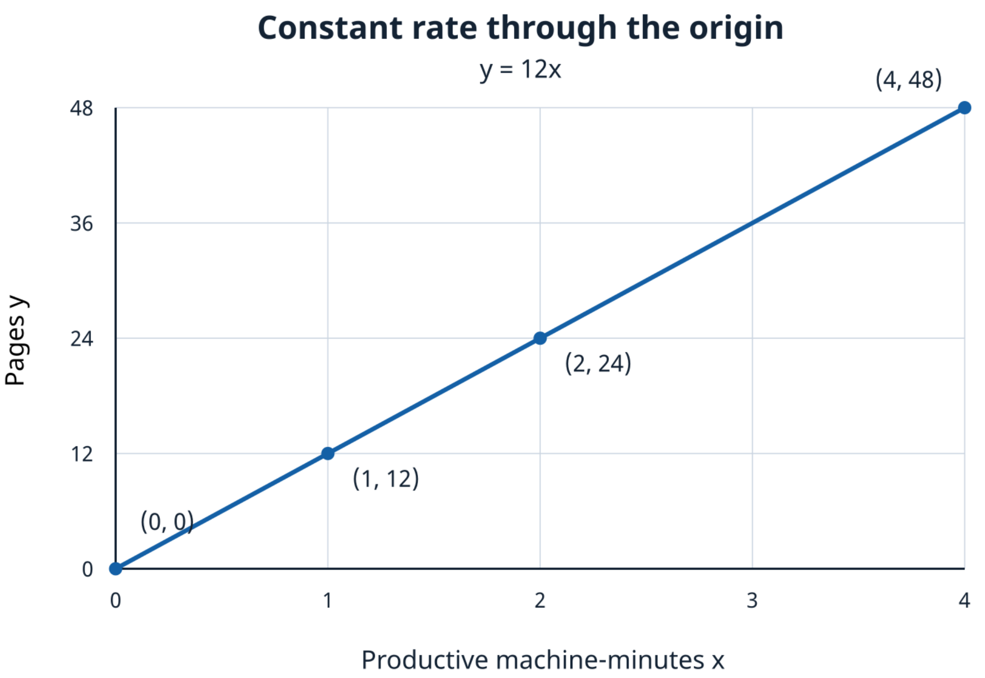
Each pair must check after combination. Do not copy the first and last terms into a three-term string while leaving the common quantity on incompatible scales.

Direct proportion needs a constant rate

Suppose x is an input and y is the corresponding output. A direct-proportion model $y = kx$ states that $y/x = k$ for every allowed nonzero x. The constant k is the output per unit input. If x changes by a positive factor s, then the new output is $k(sx) = s(kx)$, so y changes by the same factor. "Both increase" is weaker information and does not establish direct proportion.

For printing, let x be total productive machine-minutes and y be the modelled page output. One machine operating for one minute contributes one machine-minute. If n identical machines each operate productively for t minutes, $x = nt$. At a constant 12 pages per machine-minute, $y = 12x$. No setup time, idle time, shared bottleneck or change of rate is included. Completed-page counts are discrete; the line is an idealised constant-rate model, and the marked points give whole-page outputs.

Constant rate through the origin

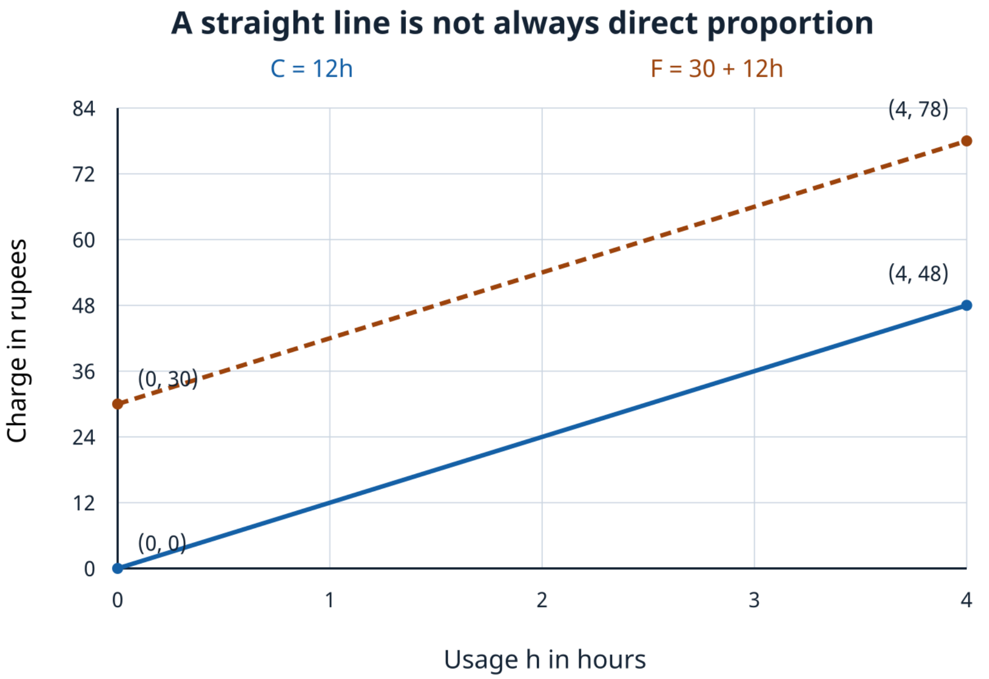


Productive machine-minutes x	Modelled pages y = 12x	y/x for nonzero x
0	0	Undefined at zero
1	12	12
2	24	12
4	48	12

Caption: On the original graph, x runs from 0 to 4 machine-minutes and y from 0 to 48 pages. The labelled points (0,0), (1,12), (2,24) and (4,48) lie on one straight line. For this cumulative-output model, zero productive time means zero modelled output, so zero is included. The quotient is checked only where x is nonzero; y/x at (0,0) is not 12 or 0, but undefined. If a different physical task permits only positive x, a line may be extended to the origin mathematically without claiming that zero is an allowed operating state.

A graph is a picture of ordered pairs: the first coordinate is read on the horizontal x-axis, the second on the vertical y-axis. A straight line means a constant change in y for equal changes in x. Direct proportion additionally requires that its mathematical line pass through (0,0). A constant slope alone is not enough.

A fixed starting amount changes the model



Compare a usage-only charge C = 12h with a charge F = 30 + 12h, where h is nonnegative hours and amounts are in rupees. The second model includes a ₹30 fee even at zero usage. Both add ₹12 for one extra hour, but only the first is directly proportional to h.

h in hours	C in ₹	F in ₹
0	0	30
1	12	42
2	24	54
4	48	78

Caption: The original comparison graph shows two parallel straight lines. C starts at (0,0); F starts at (0,30). For positive h, C/h = 12 while F/h = 12 + 30/h varies. Doubling h from 1 to 2 doubles C from 12 to 24, but F changes from 42 to 54, not 84. The form y = mx + b is called affine; with a nonzero fixed offset b, it is not direct proportion.

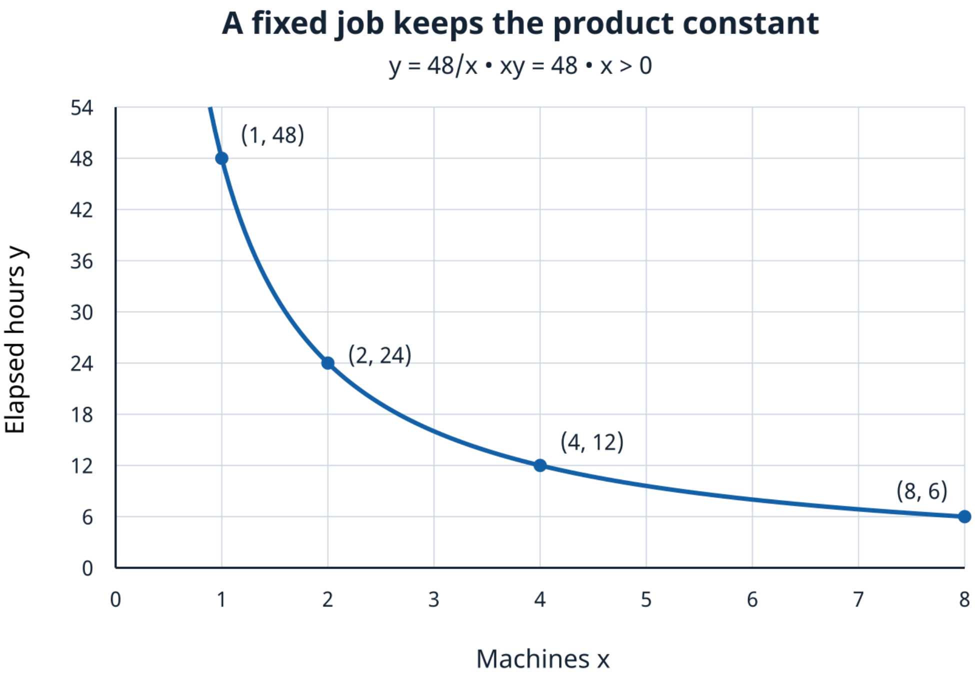
A few observed pairs may fit a proposed relationship without proving that it holds for every input. A stated constant rate or a justified physical assumption is what lets us use the model beyond those pairs. Keep the allowed range and any setup fee explicit.

Inverse proportion comes from a fixed product

For a fixed positive distance d, constant positive speed v and uninterrupted travel time t satisfy $d = vt$. Dividing by v gives $t = d/v$. The product vt stays fixed, so doubling v halves t; multiplying v by any positive factor s divides t by s. This is inverse proportion, not a rule based merely on one quantity rising while another falls.

More generally, $y = K/x$ with positive x and fixed positive K means $xy = K$. The quotient y/x is not constant. Neither $x = 0$ nor $y = 0$ belongs to this positive-product model. The units of K are the product of the units of x and y; in travel they reduce from (km/h) × h to km.

Fixed total machine-time



Suppose a divisible job needs exactly 48 machine-hours at identical, constant, independent machine rates. There is no setup delay or shared bottleneck, and work can be assigned so that all machines remain productive. With x machines and y elapsed hours, $xy = 48$ and $y = 48/x$.

Machines x	Elapsed hours y	Product xy
1	48	48
2	24	48
4	12	48
8	6	48

Caption: As x doubles, y halves. The plotted positive-branch curve falls and bends; it is not the straight line in the constant-rate graph and has no point at $x = 0$. In the machine context only positive whole-number machine counts are feasible; the smooth curve is a mathematical guide between them.

The distinction between fixed output and fixed time is essential. For output $Q = rnt$, with per-machine rate r fixed, output is directly proportional to n when t is fixed. For Q also fixed, solving gives $t = Q/(rn)$, which is inversely proportional to n. The same physical relationship produces different comparisons depending on what is held constant.

If speed rises by a fraction p of its old value, new speed is $(1 + p)v$. At fixed distance, new time is $t/(1 + p)$. Its fractional decrease relative to old time is $[t − t/(1 + p)]/t = p/(1 + p)$. Thus a 25% speed increase uses p = 0.25 and gives a time decrease of 0.25/1.25 = 0.20 = 20%. For a positive speed reduction fraction q smaller than 1, the corresponding time-increase fraction is $q/(1 − q)$. These results assume the same distance and no additional stopped time.

Decide whether there is enough information

"Six workers finished a job" does not tell us how a larger team will perform. Perhaps all can work in parallel at the same constant rate. Perhaps a single tool restricts useful work to six people, or the extra workers have different skills. To calculate an inverse-proportion completion time, state the equal-rate, additive-work and fixed-work assumptions. Otherwise name the missing model instead of manufacturing a number.

Use this decision sequence before calculating:

1. Name each quantity, its unit and the requested comparison order.
2. Identify the shared scale, fixed quotient, fixed product, or fixed offset stated in the problem.
3. Find the extra datum that determines the scale: a total, difference, one amount, rate, or fixed workload.
4. Write the relationship with units, then solve. Keep fractions exact until the final step.
5. Substitute back into every given condition. Check direction of change, feasible counts and whether rounding was requested.

Six worked examples

Worked example 1 - Normalize the units first

Simplify the ratio 750 m : 1.2 km.

Both quantities are lengths, but their written units differ. Convert 1.2 km to 1.2 × 1000 = 1200 m. Then 750 m : 1200 m = 750:1200. Dividing both terms by 150 gives 5:8.

Check: 5 × 150 m = 750 m and 8 × 150 m = 1200 m. The first length is smaller, so the first ratio term should also be smaller. Keeping 750:1.2 and simplifying the displayed numbers mixes metres with kilometres; reversing the terms would instead answer 1.2 km : 750 m.

Answer: 5:8

Worked example 2 - Allocate a whole by equal parts

A budget of ₹640 is split between printing and transport in the ratio 3:5. Find both allocations.

Write printing = 3k rupees and transport = 5k rupees. Their total is 8k = 640, so one part k = 640/8 = ₹80. Printing receives ₹240 and transport ₹400.

Two separate checks are needed: ₹240 + ₹400 = ₹640, and 240:400 = 3:5. The printing share of the whole is 3/8, not 3/5. Using (3/5) × 640 = 384 treats the whole budget as if it were the transport amount. A ratio compares its named components; it is not automatically a fraction of the total.

Answer: Printing ₹240; transport ₹400

Worked example 3 - Reconcile two scales for one quantity

Positive quantities satisfy a:b=2:3 and b:c=4:5. Find a:b:c.

In the first statement b has 3 parts; in the second it has 4. Use 12 parts for the same b. Multiply 2:3 by 4 to obtain 8:12. Multiply 4:5 by 3 to obtain 12:15. Therefore a:b:c = 8:12:15.

Check the supplied pairs: 8:12 reduces to 2:3; 12:15 reduces to 4:5. Writing 2:3:5 would give b:c = 3:5, contradicting the second statement. These ratios still do not give absolute amounts: 8,12,15 and 16,24,30 both fit. A total or one known amount would fix their common multiplier.

Answer: 8:12:15

Worked example 4 - Count productive machine-minutes

Five identical printers produce 420 pages in 7 minutes. With the same constant per-printer rate and no delays, how many pages do eight printers produce in 10 minutes?

Assume each printer works independently and their outputs add, with enough supplies and no shared bottleneck. The first run uses 5 × 7 = 35 printer-minutes. Hence the per-printer rate is 420/35 = 12 pages/(printer·minute). This is the y = 12x model in the constant-rate graph with x measured in printer-minutes.

The second run uses 8 × 10 = 80 printer-minutes, giving 80 × 12 = 960 pages. Unit check: printer·minute × pages/(printer·minute) = pages. A second calculation gives 420 × (8/5) × (10/7) = 960.

Both printer count and productive time increase, so output should exceed 420. Using an inverse rule here would wrongly hold total output fixed. If all printers had to share a device that limited throughput, the independent-rate assumption would fail and this calculation would need a different model.

Answer: 960 pages

Worked example 5 - Keep the rate unit visible

A coating process uses 12 L for 80 m^2 at a fixed consumption per unit area. How much is needed for 50 m^2?

Let A be coated area and V the coating volume. Fixed consumption per unit area means V/A = k, so V = kA. Find k = 12/80 = 0.15 L/m^2. Then V = 0.15 × 50 = 7.5 L.

Check by scaling: 50/80 = 5/8, so the new volume is 12 × 5/8 = 7.5 L. The smaller area uses less liquid under this model. The product m^2 × L/m^2 leaves litres. A fixed cleaning loss, changed layer thickness or different absorption could break the constant-consumption assumption; none is included here. Do not assume every painting or coating situation follows this model without such a condition.

Answer: 7.5 L

Worked example 6 - Derive the inverse percentage change

A vehicle travels a fixed distance. Its constant speed is increased by 25%. By what percentage does its travel time decrease?

Let the original positive speed and uninterrupted travel time be v and t. Distance is d = vt. The new speed is 1.25v = (5/4)v. Holding distance fixed gives new time = d/[(5/4)v] = (4/5)t = 0.8t.

The decrease is t − 0.8t = 0.2t. Divide by the old time t and multiply by 100 to get 20%. A numerical check: travelling 150 km at 50 km/h takes 3 h; at 62.5 km/h it takes 2.4 h. The 0.6 h decrease is 0.6/3 = 20%.

A 25% time reduction would give 0.75t, whose product with 1.25v is 0.9375vt, not the fixed distance. The percentages do not cancel because the relation is reciprocal. Distance must remain unchanged and no separate stop duration may be added.

Answer: 20% decrease

Ten practice questions

Use the relationship and its assumptions before calculating. For a choice question, select one answer; for a numerical question, give the requested value and unit. Write your reasoning before reading the solutions.

Practice question 1

What is the simplest ratio of 0.84 kg to 630 g, in that order?

- A. 4:3
- B. 3:4
- C. 4:30
- D. 840:63

Practice question 2

Positive quantities u and v, both measured in litres, satisfy u:v = 5:8. If u = 35 L, find v in litres.

Practice question 3

₹990 is divided between accounts A and B in the ratio 4:7. How much goes to B?

- A. ₹360
- B. ₹630
- C. ₹1732.50
- D. ₹90

Practice question 4

Two rods have lengths in the ratio shorter:longer = 3:8. The longer rod exceeds the shorter by 45 cm. Find the shorter length in centimetres.

Practice question 5

Three boxes P, Q and R contain a total of 124 beads. Their counts satisfy P:Q = 3:4 and Q:R = 6:5. How many beads are in R?

- A. 20
- B. 48
- C. 40
- D. 50

Practice question 6

For nonnegative usage x, two charges in rupees are P = 9x and Q = 15 + 9x. Which statement is correct?

- A. Only P is directly proportional to x.
- B. Only Q is directly proportional to x.
- C. Both are directly proportional because both graphs are straight.
- D. Neither is directly proportional because division by x is undefined at zero.

Practice question 7

Three identical packing machines make 252 packs in 7 minutes. They have constant independent additive rates, no setup delay and enough supplies. At the same rates, how many packs will five machines make in 9 minutes?

Practice question 8

A vehicle covers the same 180 km without stops, first at 45 km/h and then at 60 km/h, each speed constant. Relative to the first journey, what is the percentage decrease in travel time?

- A. 33⅓%
- B. 15%
- C. 75%
- D. 25%

Practice question 9

A divisible production job needs 432 units. Each identical machine makes 9 units per hour at a constant independent additive rate. There are no delays or shared bottlenecks, and work can keep every machine productive. How many hours do six machines need?

Practice question 10

Six workers completed a job in 18 days. The same job is assigned to nine workers. Nothing is stated about individual productivity, parallel working or shared tools. Which completion time is justified by the information alone?

- A. 12 days
- B. 18 days
- C. 27 days
- D. No unique completion time is determined.

Answers with reasoning

Solution 1

A is correct. Convert 0.84 kg to 840 g; 840:630 = 4:3 after dividing by 210. The first mass exceeds the second, agreeing with 4 being greater than 3. B reverses the requested order. C has a tenfold unit/place-value error and says the first mass is smaller. D changes only the second converted term by a factor of ten; 840:63 = 40:3, not 4:3.

Solution 2

The factor taking 5 parts to 35 L is 35/5 = 7 L per part. Apply it to both terms: v = 8 × 7 = 56 L. Check 35/56 = 5/8. Adding 30 to 8 to get 38 copies an additive change; equivalent ratios require a common multiplier. Computing 35 × 5/8 = 21.875 uses the ratio in reverse. Here one actual amount supplies the scale, so the ratio is sufficient with that extra datum.

Solution 3

B is correct. The total is 11 parts, so one part is 990/11 = ₹90 and B receives 7 × 90 = ₹630. A receives ₹360; the sum is ₹990 and the ratio is 4:7. Option A gives the other account. C is 990 × 7/4, treating the whole as account A, and even exceeds the total. D is only one ratio part, not B's seven parts.

Solution 4

Let the lengths be 3k cm and 8k cm. Their difference is 5k = 45, so k = 9 and the shorter is 27 cm. The longer is 72 cm; 72 − 27 = 45 and 27:72 = 3:8. Dividing 45 by 11 would treat the difference as a total. Giving 9 cm stops at one part. Giving 72 cm answers the longer-length question.

Solution 5

C is correct. Match Q at 12 parts: P:Q = 9:12 and Q:R = 12:10, giving 9:12:10. The total is 31 parts, so k = 124/31 = 4 beads per part and R = 10 × 4 = 40. P = 36 and Q = 48; both given ratios and the total check. A uses the unscaled 5 from the second ratio with the final 4-bead scale, mixing scales. B gives Q instead of R. D gives R:(P+Q) = 50:74 and cannot satisfy the combined ratio with a total of 124.

Solution 6

A is correct. P/x = 9 for positive x, and P = 9x includes P = 0 at x = 0. Q/x = 9 + 15/x varies, and Q begins at (0,15). For x = 2 and 4, P is 18 and 36, but Q is 33 and 51. B selects the fixed-offset model instead of the constant quotient. C mistakes a constant slope for a line through the origin. D confuses testing y/x at positive x with defining y = kx at zero; the quotient need not be defined at zero for P to be a direct-proportion model.

Solution 7

The first run has 3 × 7 = 21 machine-minutes, so the rate is 252/21 = 12 packs/(machine·minute). The new run has 5 × 9 = 45 machine-minutes and produces 45 × 12 = 540 packs. Cross-check: 252 × (5/3) × (9/7) = 540. Multiplying only by 5/3 gives 420 and misses the extra time; multiplying only by 9/7 gives 324 and misses the extra machines. No fixed-total condition justifies an inverse factor here.

Solution 8

D is correct. Original time = 180/45 = 4 h; new time = 180/60 = 3 h. Decrease = 1 h out of the original 4 h, or 25%. A is the percentage increase in speed, or the time difference divided by the new time; neither is the requested old-time-based decrease. B turns the speed difference 15 km/h into a percentage without a base. C is the remaining time as a percentage of the original, 3/4 × 100, not the decrease.

Solution 9

Six machines together make 6 × 9 = 54 units/h, so time = 432/54 = 8 h. Equivalently the job needs 432/9 = 48 machine-hours; 6t = 48 gives t = 8. Four machines would need 12 h, and both 4 × 12 and 6 × 8 equal 48 machine-hours. Reporting 48 h ignores the six simultaneous machines; reporting 72 h by multiplying 12 by 6 ignores both the old four-machine count and the fixed workload. The answer's unit is hours, not units or machine-hours.

Solution 10

D is correct. Under an added equal, constant, additive-rate model with fully divisible work, 6 × 18 = 108 worker-days and nine workers would need 108/9 = 12 days. Under a different model, a shared resource lets only six workers contribute at once, so the same observed first job can coexist with a second duration of 18 days. These two consistent possibilities already show that the given data do not select one time.

A silently adds the independent equal-rate assumptions. B silently adds a bottleneck or equivalent restriction. C applies a direct multiplier 18 × 9/6 even though fixed work has not been modelled; it is not implied either. Ask for a productivity and concurrency model, not merely another worker count. A conditional calculation is useful only when its added assumptions are disclosed.

References and further reading

The official GATE 2027 General Aptitude syllabus, section 2, includes ratios, percentages and interpretation of graphs and tables. The lesson sequence here is a teaching choice. The official papers and syllabi page states that the test papers are in English; the Hindi explanations here support learning.

For background on equal ratios and solving proportions, see OpenStax Prealgebra 2e, section 6.5. The explanations, situations, questions, data and drawings in this lesson are independently authored; the linked sources are references, not sources of copied exercises.

Analogy and its limits

Think of a measuring scoop whose capacity you do not yet know. One container holds three scoops and another five. Their amounts are in the ratio 3:5 regardless of the scoop size. Finding that the two containers together hold 640 mL fixes one scoop at 80 mL, so the amounts are 240 mL and 400 mL. A ratio is the recipe for relative shares; an actual total sets its scale.

For rates, imagine two labels on a job sheet: “same running time” and “same finished job”. With the same running time and independent identical machines, more machines give more output. With the same finished job, more such machines can reduce time. Read the label before choosing direct or inverse proportion. The scoop analogy explains share allocation; it does not by itself establish a real machine's productivity or remove bottlenecks.

Quick reference

Ratios and shares

- Preserve the comparison order. Convert like quantities to the same unit before cancelling units; a rate between unlike quantities keeps a compound unit.
- A:B = a:b means A = ak and B = bk for one common positive k. Multiply or divide all terms by the same nonzero factor; adding the same number need not preserve the ratio.
- Total T: k = T/(a + b). The shares of the whole are a/(a + b) and b/(a + b).
- Positive difference D = B − A with b greater than a: k = D/(b − a). Equal ratio terms cannot have a nonzero difference.
- A:B = a:b and B:C = c:d give A:B:C = ac:bc:bd. Match the shared quantity and check both original ratios.

Choose the model before the arithmetic

- Direct: y = kx, with y/x fixed for allowed nonzero x. Multiplying x by s multiplies y by s. Its mathematical line passes through the origin.
- Fixed offset: y = mx + b with b nonzero is not direct proportion, even though its graph is straight and its slope is constant.
- Inverse: y = K/x for positive x and fixed positive K. The product xy is fixed; multiplying x by s divides y by s. Zero is excluded.
- Constant independent machine rates: Q = rnt. Hold time fixed for output-to-machine direct proportion; hold output fixed for time-to-machine inverse proportion.
- Fixed-distance uninterrupted travel: t = d/v. A speed increase fraction p gives a time-decrease fraction p/(1 + p), measured from the original time.

Final checks

State the units, fixed quantity, positive/nonzero restrictions and productive-rate assumptions. A ratio alone does not fix absolute amounts. A larger team alone does not fix a completion time. Check the total or difference, every supplied ratio, feasible counts and the comparison base. Do not round intermediate fractions unless the task calls for an approximation.

अनुपात, हिस्से और समानुपाती मॉडल

यह पाठ किन निर्णयों में मदद करता है

अनुपात दो मात्राओं का सापेक्ष आकार बताता है। सामान्यतः केवल अनुपात से वास्तविक मात्राएँ नहीं मिलतीं। समानुपाती मॉडल इससे आगे बढ़कर बताता है कि किसी मात्रा के बदलने पर कौन-सा संबंध अपरिवर्तित रहता है। इन दोनों बातों को मिलाने पर गणना साफ दिख सकती है, पर उत्तर का आधार गलत हो सकता है।

इस पाठ में चार जुड़े कौशल सीखेंगे: समान प्रकार की मात्राओं को समान इकाई में रखकर तुलना करना; कुल मात्रा या अंतर से वास्तविक हिस्से निकालना; एक साझा मात्रा के माध्यम से अनुपात जोड़ना; और तय करना कि स्थिति में भागफल स्थिर है या गुणनफल। यह भी समझेंगे कि किसी निश्चित अतिरिक्त मात्रा से ऊपर शुरू होने वाली सीधी रेखा प्रत्यक्ष समानुपात का ग्राफ क्यों नहीं है।

शुरू करने से पहले

गुणा, भाग, समतुल्य भिन्न, दशमलव स्थान-मूल्य और सरल इकाई-परिवर्तन जानना आवश्यक है। इस पाठ में प्रयुक्त थोड़ा-सा बीजगणित इस प्रकार है।

- 2:5 के दोनों पदों को 3 से गुणा करने पर 6:15 मिलता है, क्योंकि 6/15 = 2/5। केवल एक पद को गुणा करने से तुलना बदल जाती है।
- 72 का 3/8 निकालने के लिए पहले एक आठवाँ भाग निकालें: 72 ÷ 8 = 9। ऐसे तीन भाग होंगे: 3 × 9 = 27।
- यदि 6k = 54 है, तो दोनों पक्षों को 6 से भाग देकर k = 9 मिलता है। वापस रखने पर 6 × 9 = 54 मिलता है।
- 1 km = 1000 m होने से 0.9 km = 900 m। 1 kg = 1000 g होने से 0.45 kg = 450 g। परिवर्तन से संख्या लिखने का तरीका बदलता है, वास्तविक मात्रा नहीं।
- 25% वृद्धि का अर्थ मूल मात्रा का 25/100 जोड़ना है: नई मात्रा = मूल मात्रा × (1 + 25/100) = 1.25 × मूल मात्रा। प्रतिशत परिवर्तन के लिए तुलना का आधार आवश्यक है।

स्वयं जाँचें: 18:30 सरल करें; 42 का 5/6 निकालें; 0.32 L को mL में बदलें। उत्तर: दोनों पदों को 6 से भाग देने पर 3:5; 42 ÷ 6 × 5 = 35; 1 L = 1000 mL होने से 320 mL। किसी चरण में कठिनाई हो तो समानुपात की छोटी विधि लगाने से पहले उसे समझें।

अनुपात में तुलना का क्रम स्पष्ट होता है

धनात्मक मात्राओं A और B के लिए A:B = a:b का अर्थ A/B = a/b है। क्रम महत्त्वपूर्ण है: A:B और B:A में तुलना उलट जाती है। इस पाठ में हिस्सों की संख्याएँ और माप-गुणक धनात्मक हैं; भाग में प्रयुक्त प्रत्येक हर अशून्य होना चाहिए।

यदि A और B एक ही प्रकार की मात्रा मापते हैं, तो पहले उन्हें समान इकाई में बदलें। उसके बाद ही इकाइयाँ कटती हैं। उदाहरण के लिए, दोनों लंबाइयाँ मीटर में लिखने पर लंबाई-से-लंबाई का अनुपात इकाई-रहित होता है। लंबाई और समय की तुलना अलग है: दूरी/समय एक दर है, इसलिए m/s जैसी इकाई बनी रहती है। अलग प्रकार की मात्राओं को किसी काल्पनिक साझा इकाई में बदलने की कोशिश न करें।

समतुल्य अनुपात पाने के लिए प्रत्येक पद को उसी अशून्य गुणक से गुणा या भाग देते हैं। दोनों पदों में समान संख्या जोड़ना यह काम नहीं करता। इसलिए 4:6 = 2:3 है, लेकिन 2 जोड़ने पर 6:8 = 3:4 मिलता है, जो अलग संबंध है। दशमलव होने पर दोनों पदों को 10, 100 या किसी अन्य सुविधाजनक साझा गुणक से गुणा करके पहले दशमलव हटाए जा सकते हैं।

बिना सन्निकटन के $A/B = a/b$ जाँचने के लिए दोनों पक्षों को Bb से गुणा करें: $Ab = Ba$। B और b अशून्य होने के कारण यह तिर्यक-गुणन जाँच मान्य है। तुलना की गई मात्राओं का क्रम समान रखें; गलत मॉडल को तिर्यक-गुणन सही नहीं कर सकता।

एक साझा माप-गुणक से वास्तविक मात्राएँ मिलती हैं

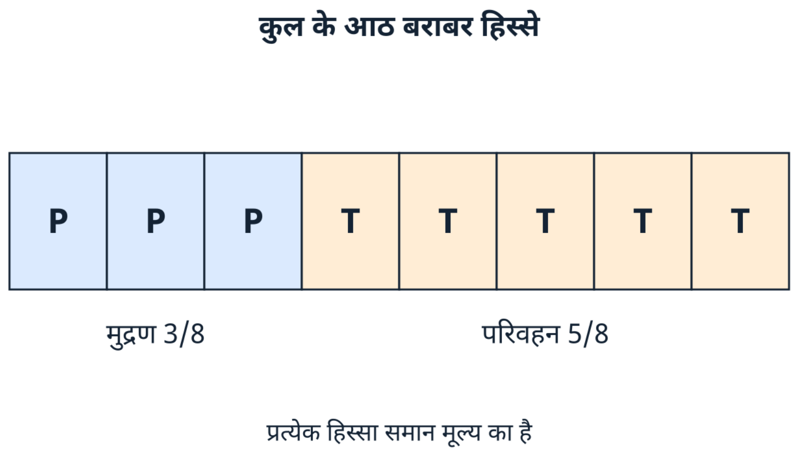
यदि $A:B = a:b$ है, तो $A = ak$ और $B = bk$ लिखें। वही k अनुपात के एक हिस्से की वास्तविक मात्रा बताता है। अनुपात में k कट जाता है, इसलिए कई युग्मों का अनुपात समान हो सकता है। 3:5 के लिए 6:10 और 30:50 दोनों सही हैं। अतिरिक्त जानकारी के बिना कोई भी वास्तविक मात्रा तय नहीं होती।

यदि $A + B = T$ है, तो $ak + bk = (a + b)k = T$। इसलिए $k = T/(a + b)$, $A = aT/(a + b)$ और $B = bT/(a + b)$। पूरी मात्रा में हिस्सों के भिन्न $a/(a + b)$ और $b/(a + b)$ हैं, a/b और b/a नहीं।

ज्ञात अंतर भी माप-गुणक तय कर सकता है। यदि $B − A = D$ और b, a से बड़ा है, तो $(b − a)k = D$ तथा $k = D/(b − a)$। यदि $a = b$ है, तो मात्राएँ बराबर हैं और दिया गया अशून्य अंतर असंगत होगा। केवल अनुपात दिया हो तो कुल मात्रा या अंतर अपनी ओर से न मानें।

गिनती के प्रश्नों में अंतिम मात्राएँ संभव पूर्ण संख्याएँ भी होनी चाहिए। धन या लंबाई का भिन्नात्मक हिस्सा मान्य हो सकता है, लेकिन किसी अविभाज्य पुर्जे की संख्या 3.5 नहीं हो सकती। k निकालने के बाद संदर्भ जाँचें।

बजट के आठ बराबर हिस्से



आवंटन	बराबर हिस्सों की संख्या	पूरी मात्रा का भिन्न
मुद्रण	3	3/8
परिवहन	5	5/8
कुल	8	1

कैप्शन: आठों हिस्सों का मूल्य समान है। “3:5” दोनों आवंटनों की तुलना करता है; “3/8” मुद्रण की तुलना पूरे बजट से करता है। इस पैनल के मौलिक चित्र में पहले P चिह्न वाले तीन हिस्से और फिर T चिह्न वाले पाँच हिस्से हैं; तालिका रंग के बिना भी वही जानकारी देती है।

साझा मात्रा बराबर करके दो अनुपात जोड़ें

मानें $A:B = a:b$ और $B:C = c:d$। दोनों कथनों में B एक ही वास्तविक मात्रा है, भले पहले अनुपात में उसके b हिस्से और दूसरे में c हिस्से हों। पहले अनुपात को c से और दूसरे को b से गुणा करें। अब B के दोनों ओर bc हिस्से हैं, इसलिए $A:B:C = ac:bc:bd$। कोई छोटा साझा गुणज गणना आसान कर सकता है; दोनों तरीकों में साझा मात्रा बराबर होना आवश्यक है।

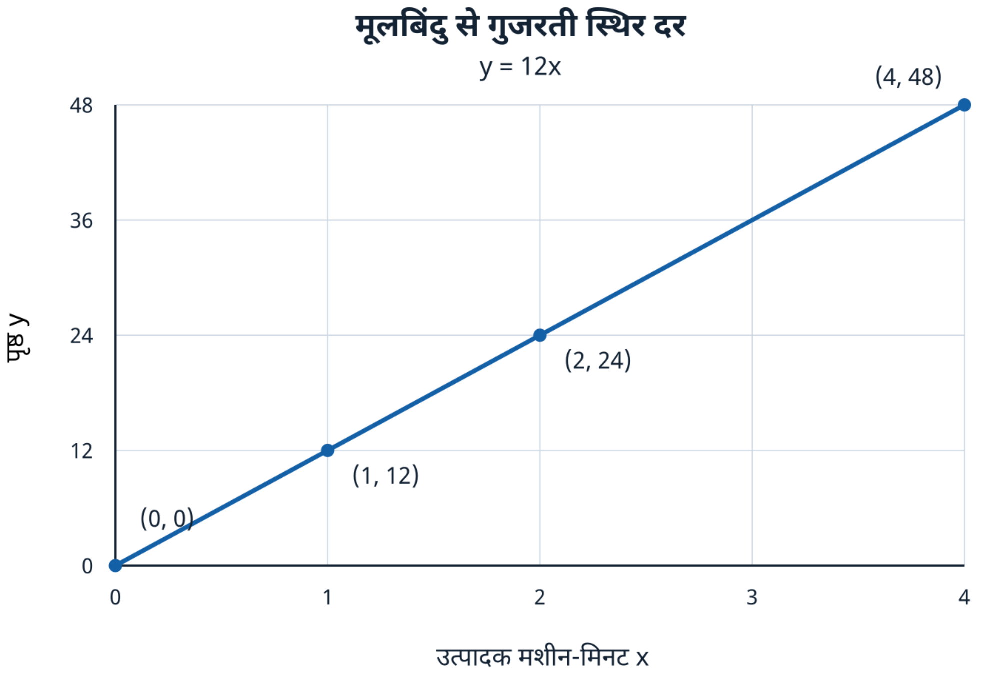
संयुक्त अनुपात बनने के बाद प्रत्येक जोड़ी की जाँच करें। साझा मात्रा के असमान माप रखते हुए केवल पहले और अंतिम पद उठाकर तीन पदों की सूची न बना दें।

प्रत्यक्ष समानुपात के लिए दर स्थिर होनी चाहिए

मानें x इनपुट मात्रा और y उससे मिलने वाली मात्रा है। प्रत्यक्ष समानुपात का मॉडल $y = kx$ कहता है कि प्रत्येक अनुमत अशून्य x के लिए $y/x = k$ है। स्थिरांक k प्रति इकाई इनपुट मिलने वाली मात्रा है। यदि x को धनात्मक गुणक s से बदला जाए, तो नई मात्रा $k(sx) = s(kx)$ होगी, यानी y भी उसी गुणक से बदलेगा। केवल "दोनों बढ़ते हैं" कहना प्रत्यक्ष समानुपात सिद्ध नहीं करता।

मुद्रण के लिए x कुल उत्पादक मशीन-मिनट और y मॉडल के अनुसार पृष्ठों का उत्पादन है। एक मशीन का एक मिनट काम करना एक मशीन-मिनट देता है। यदि n समान मशीनें प्रत्येक t मिनट उत्पादक काम करें, तो $x = nt$। प्रति मशीन-मिनट 12 पृष्ठ की स्थिर दर पर $y = 12x$ होगा। इसमें तैयारी, खाली समय, साझा संसाधन से होने वाली रुकावट या दर का बदलाव शामिल नहीं है। पूरे पृष्ठों की गिनती विविक्त होती है; रेखा स्थिर दर का आदर्श मॉडल है, और चिह्नित बिंदुओं पर पूरे पृष्ठ मिलते हैं।

मूलबिंदु से गुजरती स्थिर दर

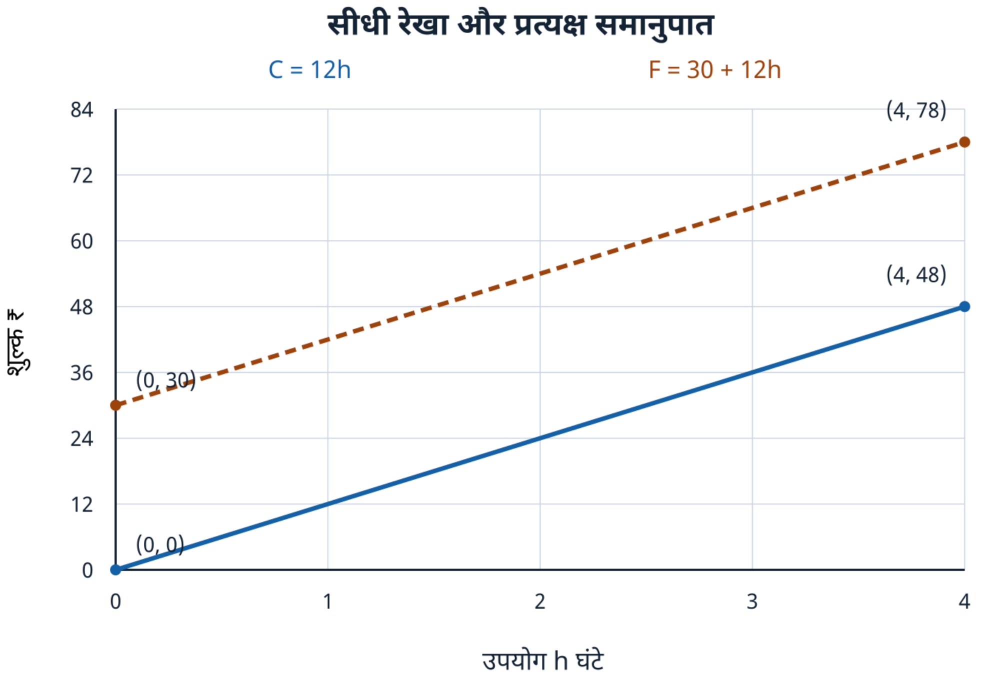


उत्पादक मशीन-मिनट x	मॉडल के पृष्ठ y = 12x	अशून्य x के लिए y/x
0	0	शून्य पर अपरिभाषित
1	12	12
2	24	12
4	48	12

कैप्शन: मौलिक ग्राफ में x, 0 से 4 मशीन-मिनट और y, 0 से 48 पृष्ठ तक है। चिह्नित बिंदु (0,0), (1,12), (2,24) और (4,48) एक ही सीधी रेखा पर हैं। इस संचयी उत्पादन मॉडल में शून्य उत्पादक समय पर मॉडल का उत्पादन शून्य है, इसलिए शून्य शामिल है। भागफल केवल अशून्य x पर जाँचते हैं; (0,0) पर y/x न 12 है, न 0, बल्कि अपरिभाषित है। किसी अन्य वास्तविक कार्य में केवल धनात्मक x मान्य हो तो रेखा को गणितीय रूप से मूलबिंदु तक बढ़ाया जा सकता है, बिना यह दावा किए कि शून्य भी अनुमत कार्य-अवस्था है।

ग्राफ क्रमित युग्मों का चित्र है: पहला निर्देशांक क्षैतिज x-अक्ष पर और दूसरा ऊर्ध्वाधर y-अक्ष पर पढ़ते हैं। सीधी रेखा का अर्थ है कि x के बराबर बदलावों पर y में बराबर बदलाव आता है। प्रत्यक्ष समानुपात में अतिरिक्त शर्त है कि उसकी गणितीय रेखा (0,0) से गुजरे। केवल स्थिर ढाल पर्याप्त नहीं है।

निश्चित शुरुआती राशि से मॉडल बदलता है



केवल उपयोग पर आधारित शुल्क C = 12h की तुलना F = 30 + 12h से करें, जहाँ h घंटों की गैर-ऋणात्मक संख्या है, अर्थात शून्य या उससे अधिक और राशि रुपये में है। दूसरे मॉडल में शून्य उपयोग पर भी ₹30 शुल्क है। दोनों में एक अतिरिक्त घंटे पर ₹12 जुड़ते हैं, पर केवल पहला h के प्रत्यक्ष समानुपात में है।

h घंटे	C रुपये में	F रुपये में
0	0	30
1	12	42
2	24	54
4	48	78

कैप्शन: मौलिक तुलना-ग्राफ में दो समांतर सीधी रेखाएँ हैं। C, (0,0) से और F, (0,30) से शुरू होती है। धनात्मक h पर C/h = 12 है, जबकि F/h = 12 + 30/h बदलता है। h को 1 से 2 करने पर C, 12 से 24 होकर दोगुना होता है, लेकिन F, 42 से 54 होता है, 84 नहीं। y = mx + b रूप को एफ़ाइन कहते हैं; अशून्य निश्चित प्रारंभिक पद b होने पर यह प्रत्यक्ष समानुपात नहीं है।

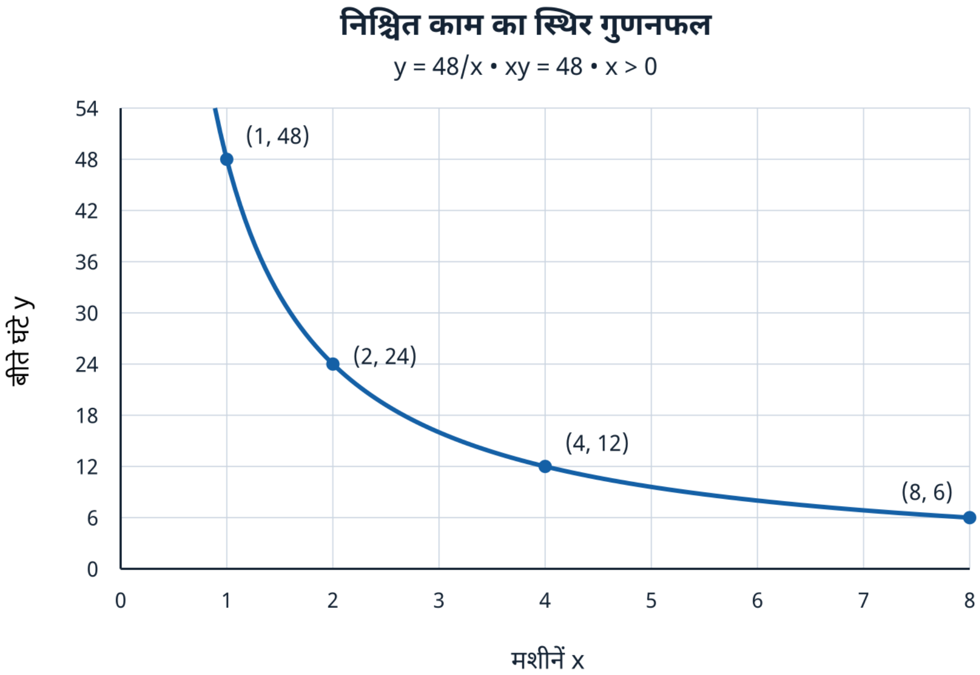
कुछ देखे गए युग्म किसी संबंध से मेल खा सकते हैं, पर इससे हर इनपुट पर वह संबंध सिद्ध नहीं होता। बताई गई स्थिर दर या उचित भौतिक मान्यता ही उन युग्मों से आगे मॉडल इस्तेमाल करने का आधार देती है। अनुमत सीमा और तैयारी का कोई शुल्क स्पष्ट रखें।

व्युत्क्रम समानुपात स्थिर गुणनफल से निकलता है

निश्चित धनात्मक दूरी d, स्थिर धनात्मक चाल v और बिना रुकावट यात्रा-समय t के लिए $d = vt$ होता है। v से भाग देने पर $t = d/v$ मिलता है। गुणनफल vt स्थिर है, इसलिए v दोगुना करने पर t आधा होगा; v को किसी धनात्मक गुणक s से गुणा करने पर t को s से भाग देना होगा। यही व्युत्क्रम समानुपात है। केवल एक मात्रा के बढ़ने और दूसरी के घटने से यह संबंध तय नहीं होता।

सामान्य रूप में धनात्मक x और निश्चित धनात्मक K के लिए $y = K/x$ का अर्थ $xy = K$ है। भागफल y/x स्थिर नहीं है। इस धनात्मक गुणनफल वाले मॉडल में $x = 0$ या $y = 0$ मान्य नहीं है। K की इकाई x और y की इकाइयों का गुणनफल है; यात्रा में $(km/h) \times h$ से km मिलता है।

कुल मशीन-समय निश्चित



मानें किसी बाँटे जा सकने वाले काम में समान, स्थिर और स्वतंत्र मशीन-दरों पर ठीक 48 मशीन-घंटे लगते हैं। तैयारी में देरी या साझा संसाधन से रुकावट नहीं है और काम इस प्रकार बाँटा जा सकता है कि सभी मशीनें लगातार उत्पादक रहें। x मशीनों और y बीते घंटों के लिए $xy = 48$ तथा $y = 48/x$।

मशीनें x	बीते घंटे y	गुणनफल xy
1	48	48
2	24	48
4	12	48
8	6	48

कैप्शन: x दोगुना होने पर y आधा होता है। धनात्मक मानों का खींचा गया वक्र नीचे आता है और मुड़ता है; यह स्थिर दर वाले ग्राफ की सीधी रेखा नहीं है और $x = 0$ पर इसका कोई बिंदु नहीं है। मशीनों के संदर्भ में केवल धनात्मक पूर्ण संख्या में मशीनें संभव हैं; चिकना वक्र उनके बीच गणितीय मार्गदर्शन देता है।

निश्चित उत्पादन और निश्चित समय में अंतर समझना आवश्यक है। $Q = rnt$ में प्रति मशीन दर r स्थिर हो, तो t निश्चित होने पर उत्पादन Q, n के प्रत्यक्ष समानुपात में है। यदि Q भी निश्चित हो, तो हल करने पर $t = Q/(rn)$ मिलता है, जो n के व्युत्क्रम समानुपात में है। किन राशियों को स्थिर रखा गया है, उसके अनुसार एक ही भौतिक संबंध से अलग तुलना बनती है।

चाल में उसकी मूल मात्रा के अंश p की वृद्धि हो, तो नई चाल (1 + p)v है। निश्चित दूरी पर नया समय t/(1 + p) होगा। मूल समय के सापेक्ष घटा हुआ अंश [t − t/(1 + p)]/t = p/(1 + p) है। इसलिए 25% चाल-वृद्धि में p = 0.25 रखने पर समय की कमी 0.25/1.25 = 0.20 = 20% मिलती है। चाल में धनात्मक अंश q की कमी हो, जहाँ q, 1 से छोटा है, तो समय की वृद्धि का अंश q/(1 − q) होगा। इन निष्कर्षों में दूरी समान है और अलग से रुकने का समय नहीं जोड़ा गया है।

तय करें कि जानकारी पर्याप्त है या नहीं

“छह श्रमिकों ने एक काम पूरा किया” से यह नहीं पता चलता कि बड़ी टीम कितना समय लेगी। संभव है सब एक ही स्थिर दर पर समानांतर काम कर सकें। यह भी संभव है कि एक साझा औज़ार के कारण केवल छह लोग उपयोगी काम कर सकें, या नए श्रमिकों का कौशल अलग हो। व्युत्क्रम समानुपात से समय निकालने के लिए समान दर, काम के योगदानों का जुड़ना और निश्चित कार्य की मान्यताएँ स्पष्ट हों। अन्यथा कोई संख्या बनाने के बजाय बताएँ कि कौन-सा मॉडल नहीं दिया गया है।

गणना से पहले यह क्रम अपनाएँ:

1. हर मात्रा, उसकी इकाई और माँगी गई तुलना का क्रम लिखें।
2. प्रश्न में बताया गया साझा माप-गुणक, स्थिर भागफल, स्थिर गुणनफल या निश्चित अतिरिक्त पद पहचानें।
3. माप तय करने वाली अतिरिक्त जानकारी खोजें: कुल, अंतर, एक मात्रा, दर या निश्चित कार्यभार।
4. इकाइयों सहित संबंध लिखकर हल करें। अंतिम चरण तक भिन्नों को सटीक रखें।
5. हर दी गई शर्त में उत्तर वापस रखें। बदलाव की दिशा, संभव गिनती और माँगे गए सन्निकटन की जाँच करें।

छह हल किए हुए उदाहरण

हल किया हुआ उदाहरण 1 - पहले इकाइयाँ समान करें

750 m : 1.2 km का अनुपात सरल करें।

दोनों मात्राएँ लंबाइयाँ हैं, पर लिखी गई इकाइयाँ अलग हैं। 1.2 km = 1.2 × 1000 = 1200 m करें। फिर 750 m : 1200 m = 750:1200। दोनों पदों को 150 से भाग देने पर 5:8 मिलता है।

जाँच: 5 × 150 m = 750 m और 8 × 150 m = 1200 m। पहली लंबाई छोटी है, इसलिए अनुपात का पहला पद भी छोटा होना चाहिए। 750:1.2 रखकर केवल लिखी संख्याएँ सरल करने पर मीटर और किलोमीटर मिल जाते हैं; पद उलटने पर प्रश्न 1.2 km : 750 m का उत्तर मिलेगा।

उत्तर: 5:8

हल किया हुआ उदाहरण 2 - पूरी मात्रा को बराबर हिस्सों से बाँटें

₹640 का बजट मुद्रण और परिवहन में 3:5 के अनुपात में बाँटा गया है। दोनों आवंटन निकालें।

मुद्रण = 3k रुपये और परिवहन = 5k रुपये लिखें। कुल 8k = 640 है, इसलिए एक हिस्सा k = 640/8 = ₹80। मुद्रण को ₹240 और परिवहन को ₹400 मिलेंगे।

दो अलग जाँचें करें: ₹240 + ₹400 = ₹640 और 240:400 = 3:5। पूरे बजट में मुद्रण का हिस्सा 3/8 है, 3/5 नहीं। (3/5) × 640 = 384 करने पर पूरे बजट को परिवहन की राशि मान लिया जाता है। अनुपात अपने बताए गए घटकों की तुलना करता है; वह अपने-आप कुल का भिन्न नहीं होता।

उत्तर: मुद्रण ₹240; परिवहन ₹400

हल किया हुआ उदाहरण 3 - एक मात्रा के दो मापों को मिलाएँ

धनात्मक मात्राओं के लिए a:b = 2:3 और b:c = 4:5 हैं। a:b:c निकालें।

पहले कथन में b के 3 हिस्से हैं, दूसरे में 4। उसी b के लिए 12 हिस्से लें। 2:3 को 4 से गुणा करने पर 8:12 मिलता है। 4:5 को 3 से गुणा करने पर 12:15 मिलता है। इसलिए a:b:c = 8:12:15।

दी गई जोड़ियों की जाँच करें: 8:12 सरल होकर 2:3 है; 12:15 सरल होकर 4:5 है। 2:3:5 लिखने पर b:c = 3:5 होगा, जो दूसरे कथन के विरुद्ध है। इन अनुपातों से अभी भी वास्तविक मात्राएँ नहीं मिलतीं: 8,12,15 और 16,24,30 दोनों सही हैं। कुल मात्रा या एक ज्ञात मात्रा से साझा गुणक तय होगा।

उत्तर: 8:12:15

हल किया हुआ उदाहरण 4 - उत्पादक मशीन-मिनट गिनें

पाँच समान प्रिंटर 7 मिनट में 420 पृष्ठ छापते हैं। प्रति प्रिंटर वही स्थिर दर रहे और कोई देरी न हो, तो आठ प्रिंटर 10 मिनट में कितने पृष्ठ छापेंगे?

मानें प्रत्येक प्रिंटर स्वतंत्र काम करता है, पर्याप्त सामग्री उपलब्ध है, साझा संसाधन से कोई बाधा नहीं है और उनके उत्पादन जुड़ते हैं। पहली बार 5 × 7 = 35 प्रिंटर-मिनट लगे। इसलिए प्रति प्रिंटर दर 420/35 = 12 पृष्ठ/(प्रिंटर·मिनट) है। यह स्थिर दर वाले ग्राफ का y = 12x मॉडल है, जिसमें x प्रिंटर-मिनट में है।

दूसरी बार 8 × 10 = 80 प्रिंटर-मिनट लगेंगे, इसलिए 80 × 12 = 960 पृष्ठ मिलेंगे। इकाई-जाँच: प्रिंटर·मिनट × पृष्ठ/(प्रिंटर·मिनट) = पृष्ठ। दूसरी गणना भी 420 × (8/5) × (10/7) = 960 देती है।

प्रिंटरों की संख्या और उत्पादक समय दोनों बढ़े हैं, इसलिए उत्पादन 420 से अधिक होना चाहिए। यहाँ व्युत्क्रम नियम लगाने पर गलती से कुल उत्पादन स्थिर मान लिया जाएगा। यदि सभी प्रिंटर किसी साझा यंत्र की सीमित क्षमता पर निर्भर हों, तो स्वतंत्र दर की मान्यता गलत होगी और अलग मॉडल चाहिए।

उत्तर: 960 पृष्ठ

हल किया हुआ उदाहरण 5 - दर की इकाई लिखते रहें

एक परत चढ़ाने की प्रक्रिया में प्रति इकाई क्षेत्रफल खपत स्थिर है। 80 m^2 के लिए 12 L लगते हैं। 50 m^2 के लिए कितना द्रव चाहिए?

मानें A परत चढ़ाया गया क्षेत्रफल और V द्रव का आयतन है। प्रति इकाई क्षेत्रफल खपत स्थिर होने का अर्थ V/A = k है, इसलिए V = kA। k = 12/80 = 0.15 L/m^2। फिर V = 0.15 × 50 = 7.5 L।

माप बदलकर जाँचें: 50/80 = 5/8, इसलिए नया आयतन 12 × 5/8 = 7.5 L है। इस मॉडल में छोटे क्षेत्रफल पर कम द्रव लगेगा। m^2 × L/m^2 से लीटर बचता है। सफाई में निश्चित हानि, परत की बदली मोटाई या अलग अवशोषण से स्थिर खपत की मान्यता टूट सकती है; यहाँ इनमें से कुछ शामिल नहीं है। ऐसी शर्त के बिना हर रंगाई या परत लगाने की स्थिति को इसी मॉडल का न मानें।

उत्तर: 7.5 L

हल किया हुआ उदाहरण 6 - व्युत्क्रम प्रतिशत परिवर्तन निकालें

एक वाहन निश्चित दूरी तय करता है। उसकी स्थिर चाल 25% बढ़ाई जाती है। यात्रा के समय में कितने प्रतिशत कमी होगी?

मूल धनात्मक चाल और बिना रुकावट यात्रा-समय v तथा t मानें। दूरी d = vt है। नई चाल 1.25v = (5/4)v होगी। दूरी निश्चित रखने पर नया समय = d/[(5/4)v] = (4/5)t = 0.8t।

कमी t − 0.8t = 0.2t है। इसे मूल समय t से भाग देकर 100 से गुणा करने पर 20% मिलता है। संख्यात्मक जाँच: 150 km को 50 km/h पर तय करने में 3 h लगते हैं; 62.5 km/h पर 2.4 h। 0.6 h की कमी 0.6/3 = 20% है।

समय में 25% कमी मानने पर 0.75t मिलेगा, जिसका 1.25v से गुणनफल 0.9375vt है, निश्चित दूरी नहीं। संबंध व्युत्क्रम होने के कारण प्रतिशत बराबर नहीं घटते-बढ़ते। दूरी समान रहनी चाहिए और अलग से रुकने का समय नहीं जोड़ना चाहिए।

उत्तर: 20% कमी

दस अभ्यास प्रश्न

गणना से पहले संबंध और उसकी मान्यताएँ लिखें। विकल्प वाले प्रश्न में एक उत्तर चुनें; संख्यात्मक प्रश्न में माँगी गई संख्या और इकाई दें। हल देखने से पहले अपना तर्क लिखें।

अभ्यास प्रश्न 1

0.84 kg और 630 g का, इसी क्रम में, सरलतम अनुपात क्या है?

- A. 4:3
- B. 3:4
- C. 4:30
- D. 840:63

अभ्यास प्रश्न 2

लीटर में मापी गई धनात्मक मात्राएँ u और v, u:v = 5:8 को संतुष्ट करती हैं। u = 35 L हो तो v लीटर में निकालें।

अभ्यास प्रश्न 3

₹990 को खातों A और B में 4:7 के अनुपात में बाँटा जाता है। B को कितनी राशि मिलेगी?

- A. ₹360
- B. ₹630
- C. ₹1732.50
- D. ₹90

अभ्यास प्रश्न 4

दो छड़ों की लंबाइयों का अनुपात छोटी:लंबी = 3:8 है। लंबी छड़ छोटी से 45 cm अधिक है। छोटी लंबाई सेंटीमीटर में निकालें।

अभ्यास प्रश्न 5

तीन डिब्बों P, Q और R में कुल 124 मनके हैं। उनकी संख्याओं में P:Q = 3:4 और Q:R = 6:5 है। R में कितने मनके हैं?

- A. 20
- B. 48
- C. 40
- D. 50

अभ्यास प्रश्न 6

गैर-ऋणात्मक उपयोग x के लिए रुपये में दो शुल्क P = 9x और Q = 15 + 9x हैं। कौन-सा कथन सही है?

- A. केवल P, x के प्रत्यक्ष समानुपात में है।
- B. केवल Q, x के प्रत्यक्ष समानुपात में है।
- C. दोनों प्रत्यक्ष समानुपात में हैं क्योंकि दोनों ग्राफ सीधे हैं।
- D. कोई प्रत्यक्ष समानुपात में नहीं है क्योंकि शून्य पर x से भाग अपरिभाषित है।

अभ्यास प्रश्न 7

तीन समान पैकिंग मशीनें 7 मिनट में 252 पैक बनाती हैं। उनकी दरें स्थिर और स्वतंत्र हैं, योगदान जुड़ते हैं, तैयारी में देरी नहीं है और सामग्री पर्याप्त है। उन्हीं दरों पर पाँच मशीनें 9 मिनट में कितने पैक बनाएँगी?

अभ्यास प्रश्न 8

एक वाहन वही 180 km बिना रुके पहले 45 km/h और फिर 60 km/h की स्थिर चाल से तय करता है। पहली यात्रा के सापेक्ष समय में कितने प्रतिशत कमी है?

- A. 33⅓%
- B. 15%
- C. 75%
- D. 25%

अभ्यास प्रश्न 9

एक बाँटे जा सकने वाले उत्पादन-कार्य में 432 इकाइयाँ बनानी हैं। प्रत्येक समान मशीन स्थिर, स्वतंत्र और जुड़ने वाली दर पर 9 इकाइयाँ प्रति घंटा बनाती है। देरी या साझा बाधा नहीं है और हर मशीन को लगातार उत्पादक काम दिया जा सकता है। छह मशीनें कितने घंटे लेंगी?

अभ्यास प्रश्न 10

छह श्रमिकों ने एक काम 18 दिनों में पूरा किया। वही काम नौ श्रमिकों को दिया जाता है। व्यक्तिगत उत्पादकता, समानांतर काम या साझा औज़ारों के बारे में कुछ नहीं कहा गया है। केवल दी गई जानकारी से कौन-सा समय उचित रूप से तय होता है?

- A. 12 दिन
- B. 18 दिन
- C. 27 दिन
- D. एक निश्चित अद्वितीय समय तय नहीं होता।

तर्क सहित उत्तर

हल 1

A सही है। 0.84 kg = 840 g; 840:630 को 210 से भाग देने पर 4:3 मिलता है। पहला द्रव्यमान अधिक है, जो 4 के 3 से बड़े होने से मेल खाता है। B माँगा गया क्रम उलटता है। C में दस गुने का इकाई/स्थान-मूल्य दोष है और पहला द्रव्यमान छोटा बताया गया है। D में केवल दूसरे परिवर्तित पद को दस से बदला गया है; 840:63 = 40:3 है, 4:3 नहीं।

हल 2

5 हिस्सों को 35 L बनाने वाला गुणक 35/5 = 7 L प्रति हिस्सा है। दोनों पदों पर यही लगाएँ: v = 8 × 7 = 56 L। जाँच: 35/56 = 5/8। 8 में 30 जोड़कर 38 लेना जोड़ वाला परिवर्तन दोहराता है; समतुल्य अनुपात के लिए साझा गुणक चाहिए। 35 × 5/8 = 21.875 करना अनुपात उलट देता है। यहाँ एक वास्तविक मात्रा से माप तय हो रहा है, इसलिए इस अतिरिक्त जानकारी सहित अनुपात पर्याप्त है।

हल 3

B सही है। कुल 11 हिस्से हैं, इसलिए एक हिस्सा 990/11 = ₹90 और B के 7 × 90 = ₹630 हैं। A के ₹360 हैं; योग ₹990 और अनुपात 4:7 है। विकल्प A दूसरे खाते की राशि देता है। C में 990 × 7/4 किया गया है, यानी पूरे को खाता A मान लिया गया; उत्तर कुल से भी अधिक है। D केवल एक हिस्सा है, B के सात हिस्से नहीं।

हल 4

लंबाइयाँ 3k cm और 8k cm मानें। उनका अंतर 5k = 45 है, इसलिए k = 9 और छोटी छड़ 27 cm है। लंबी 72 cm है; 72 − 27 = 45 और 27:72 = 3:8। 45 को 11 से भाग देने पर अंतर को कुल मान लिया जाता है। 9 cm देने पर केवल एक हिस्से तक रुके हैं। 72 cm लंबी छड़ का उत्तर है।

हल 5

C सही है। Q के 12 हिस्से करें: P:Q = 9:12 और Q:R = 12:10, इसलिए 9:12:10। कुल 31 हिस्से हैं, अतः k = 124/31 = 4 मनके प्रति हिस्सा और R = 10 × 4 = 40। P = 36 तथा Q = 48; दोनों दिए अनुपात और कुल सही हैं। A में दूसरे अनुपात का बिना बदला 5, अंतिम 4-मनके माप से गुणा किया गया है, जिससे माप मिल गए। B, R के बजाय Q देता है। D में R:(P+Q) = 50:74 होगा और 124 के कुल के साथ संयुक्त अनुपात पूरा नहीं होता।

हल 6

A सही है। धनात्मक x पर P/x = 9 है, और P = 9x में x = 0 पर P = 0 भी शामिल है। Q/x = 9 + 15/x बदलता है और Q, (0,15) से शुरू होता है। x = 2 और 4 पर P, 18 और 36 है, लेकिन Q, 33 और 51। B स्थिर भागफल के बजाय निश्चित अतिरिक्त शुल्क वाला मॉडल चुनता है। C स्थिर ढाल को मूलबिंदु से गुजरना मान लेता है। D धनात्मक x पर y/x जाँचने और शून्य पर y = kx परिभाषित करने को मिला देता है; P के प्रत्यक्ष समानुपात में होने के लिए शून्य पर भागफल परिभाषित होना आवश्यक नहीं है।

हल 7

पहले 3 × 7 = 21 मशीन-मिनट हैं, इसलिए दर 252/21 = 12 पैक/(मशीन·मिनट)। नए कार्य में 5 × 9 = 45 मशीन-मिनट हैं और उत्पादन 45 × 12 = 540 पैक है। दूसरी जाँच: 252 × (5/3) × (9/7) = 540। केवल 5/3 से गुणा करने पर 420 मिलता है और अतिरिक्त समय छूट जाता है; केवल 9/7 से गुणा करने पर 324 मिलता है और अतिरिक्त मशीनें छूट जाती हैं। यहाँ कुल उत्पादन निश्चित नहीं है, इसलिए व्युत्क्रम गुणक का आधार नहीं है।

हल 8

D सही है। मूल समय = 180/45 = 4 h; नया समय = 180/60 = 3 h। कमी मूल 4 h में से 1 h है, यानी 25%। A चाल की प्रतिशत वृद्धि है, या समय के अंतर को नए समय से भाग देने पर मिलता है; दोनों में से कोई मूल समय के आधार पर माँगी गई कमी नहीं है। B, 15 km/h की चाल के अंतर को बिना आधार प्रतिशत बना देता है। C, मूल समय का बचा हुआ प्रतिशत 3/4 × 100 है, कमी नहीं।

हल 9

छह मशीनें मिलकर 6 × 9 = 54 इकाइयाँ/h बनाती हैं, इसलिए समय = 432/54 = 8 h। दूसरे रूप में कार्य को 432/9 = 48 मशीन-घंटे चाहिए; 6t = 48 से t = 8। चार मशीनों को 12 h लगते, और 4 × 12 तथा 6 × 8 दोनों 48 मशीन-घंटे हैं। 48 h बताने पर छह मशीनों का एक साथ काम करना छूट जाता है; 12 को 6 से गुणा करके 72 h बताने पर पुरानी चार मशीनें और निश्चित कार्यभार दोनों छूटते हैं। उत्तर की इकाई घंटे है, उत्पादन-इकाइयाँ या मशीन-घंटे नहीं।

हल 10

D सही है। यदि अतिरिक्त रूप से समान, स्थिर और जुड़ने वाली दरों तथा पूरी तरह बाँटे जा सकने वाले काम का मॉडल मानें, तो 6 × 18 = 108 श्रमिक-दिन और नौ श्रमिकों के लिए 108/9 = 12 दिन मिलेंगे। दूसरे मॉडल में साझा संसाधन एक साथ केवल छह श्रमिकों को काम करने देता है; इसलिए पहली देखी गई अवधि के साथ दूसरी अवधि 18 दिन भी हो सकती है। ये दो संगत संभावनाएँ ही दिखाती हैं कि दी गई जानकारी कोई एक समय नहीं चुनती।

A चुपचाप स्वतंत्र समान दरों की मान्यताएँ जोड़ता है। B चुपचाप बाधा या ऐसी ही सीमा जोड़ता है। C में 18 × 9/6 का प्रत्यक्ष गुणक लगाया गया है, जबकि निश्चित काम का मॉडल ही नहीं बताया गया; यह समय भी निष्कर्ष नहीं है। उत्पादकता और एक साथ काम करने का मॉडल चाहिए, केवल एक और श्रमिक-संख्या नहीं। शर्त पर आधारित गणना तभी उपयोगी है जब जोड़ी गई मान्यताएँ बताई जाएँ।

संदर्भ और आगे का अध्ययन

आधिकारिक GATE 2027 सामान्य अभिरुचि पाठ्यक्रम के खंड 2 में अनुपात, प्रतिशत तथा ग्राफ और तालिकाओं की व्याख्या शामिल हैं। यहाँ पाठों का क्रम शिक्षण के लिए चुना गया है। आधिकारिक प्रश्न-पत्र और पाठ्यक्रम पृष्ठ के अनुसार परीक्षा-पत्र अंग्रेज़ी में हैं; यहाँ हिंदी व्याख्याएँ सीखने में सहायता के लिए हैं।

समान अनुपात और समानुपात हल करने की पृष्ठभूमि के लिए OpenStax Prealgebra 2e, खंड 6.5 देखें। इस पाठ की व्याख्याएँ, स्थितियाँ, प्रश्न, आँकड़े और चित्र स्वतंत्र रूप से रचे गए हैं; दिए लिंक संदर्भ हैं, उनसे अभ्यास नकल नहीं किए गए हैं।

उपमा और उसकी सीमाएँ

एक मापने वाला प्याला सोचें, जिसकी क्षमता अभी ज्ञात नहीं है। एक पात्र में तीन प्याले और दूसरे में पाँच प्याले द्रव है। प्याले की क्षमता चाहे जो हो, मात्राओं का अनुपात 3:5 है। यदि दोनों में मिलाकर 640 mL हो, तो एक प्याले का माप 80 mL तय होता है, इसलिए मात्राएँ 240 mL और 400 mL हैं। अनुपात सापेक्ष हिस्सों की विधि है; वास्तविक कुल से उसका माप तय होता है।

दरों के लिए कार्य-पत्र पर दो अलग निर्देश सोचें: “चलने का समय समान” और “पूरा किया जाने वाला काम समान”। समान समय और स्वतंत्र समान मशीनों में अधिक मशीनें अधिक उत्पादन देती हैं। वही पूरा काम करना हो, तो अधिक ऐसी मशीनें समय घटा सकती हैं। प्रत्यक्ष या व्युत्क्रम समानुपात चुनने से पहले निर्देश पढ़ें। प्याले का उदाहरण हिस्से बाँटना समझाता है; उससे किसी वास्तविक मशीन की उत्पादकता सिद्ध नहीं होती और साझा बाधाएँ अपने-आप नहीं हटतीं।

त्वरित संदर्भ

अनुपात और हिस्से

- तुलना का क्रम बनाए रखें। समान प्रकार की मात्राओं की इकाइयाँ काटने से पहले समान करें; अलग प्रकार की मात्राओं की दर में संयुक्त इकाई बनी रहती है।
- A:B = a:b का अर्थ एक साझा धनात्मक k के लिए A = ak और B = bk है। सभी पदों को उसी अशून्य गुणक से गुणा या भाग दें; समान संख्या जोड़ने से अनुपात बना रहे, यह आवश्यक नहीं।
- कुल T हो: k = T/(a + b)। पूरे में हिस्से a/(a + b) और b/(a + b) हैं।
- धनात्मक अंतर D = B − A हो और b, a से बड़ा हो: k = D/(b − a)। बराबर अनुपात-पदों का अंतर अशून्य नहीं हो सकता।
- A:B = a:b और B:C = c:d से A:B:C = ac:bc:bd। साझा मात्रा मिलाएँ और दोनों मूल अनुपात जाँचें।

गणना से पहले मॉडल चुनें

- प्रत्यक्ष: y = kx; अनुमत अशून्य x पर y/x स्थिर है। x को s से गुणा करने पर y भी s से गुणा होता है। इसकी गणितीय रेखा मूलबिंदु से गुजरती है।
- निश्चित अतिरिक्त पद: अशून्य b के साथ y = mx + b प्रत्यक्ष समानुपात नहीं है, भले ग्राफ सीधा और ढाल स्थिर हो।
- व्युत्क्रम: धनात्मक x और निश्चित धनात्मक K के लिए y = K/x। गुणनफल xy स्थिर है; x को s से गुणा करने पर y को s से भाग देते हैं। शून्य मान्य नहीं है।
- स्थिर स्वतंत्र मशीन-दरें: Q = rnt। उत्पादन और मशीन-संख्या के प्रत्यक्ष संबंध के लिए समय निश्चित रखें; समय और मशीन-संख्या के व्युत्क्रम संबंध के लिए उत्पादन निश्चित रखें।
- निश्चित दूरी की बिना रुके यात्रा: t = d/v। चाल-वृद्धि के अंश p से मूल समय के आधार पर समय-कमी का अंश p/(1 + p) मिलता है।

अंतिम जाँच

इकाइयाँ, निश्चित मात्रा, धनात्मक/अशून्य होने की शर्तें और उत्पादक दर की मान्यताएँ लिखें। केवल अनुपात वास्तविक मात्राएँ तय नहीं करता। केवल बड़ी टीम समय तय नहीं करती। कुल या अंतर, हर दिया अनुपात, संभव गिनती और तुलना का आधार जाँचें। प्रश्न में सन्निकटन न माँगा हो तो बीच के भिन्नों को सटीक रखें।