

Squares Square Roots and Sensible Estimates

वर्ग वर्गमूल और उचित अनुमान

Lesson 5 of 5 | Numbers and Calculation | Free bilingual workbook

5 में से पाठ 5 | संख्याएँ और गणना | निःशुल्क द्विभाषी कार्यपुस्तिका

Use the English or Hindi section. Read the explanations, show your own steps, then check the answers. This focused workbook is part of the five-lesson Numbers and Calculation module.

अंग्रेज़ी या हिंदी खंड पढ़ें। व्याख्या समझें, अपने चरण लिखें, फिर उत्तर जाँचें। यह केंद्रित कार्यपुस्तिका पाँच पाठों वाले संख्याएँ और गणना मॉड्यूल का हिस्सा है।

Choose your section / अपना खंड चुनें

[English lesson and practice](#)

[English quick reference](#)

[हिंदी पाठ और अभ्यास](#)

[हिंदी त्वरित संदर्भ](#)

Original learning practice. Untimed, with no negative marking or pass cutoff. This workbook is not a full RRB CBT simulation or the complete Mathematics course.

मौलिक अध्ययन अभ्यास। समय-सीमा, ऋणात्मक अंकन या उत्तीर्ण होने की न्यूनतम अंक-शर्त नहीं है। यह कार्यपुस्तिका पूरे आरआरबी सीबीटी का अनुकरण या गणित का पूरा पाठ्यक्रम नहीं है।

Squares Square Roots and Sensible Estimates

What you will learn

A square-root answer needs both a correct value and a correct meaning. In this lesson you will:

- Distinguish squaring, the principal square root, and the solutions of a squared equation
- Reject impossible integer squares and confirm possible ones using prime-factor pairs
- Find the smallest positive integer multiplier or exact divisor that produces an integer square
- Find integer and decimal square roots by digit-pair long division
- Find exact fraction roots, bound other roots, and label an estimate honestly

Square root is named in the Mathematics syllabus in RRB CEN 09/2025 §14.1. This foundation lesson does not predict exam weightage. It uses the prime factorisation and fraction/decimal skills from earlier lessons. Advanced surds, rationalisation and cube roots are outside this lesson.

1 Before you begin

Try these retrieval checks before reading the feedback.

1. Evaluate 4^2 and $(-4)^2$.
2. Write 180 as a product of prime factors.
3. Express 0.49 as a fraction with an integer numerator and denominator.

Retrieval feedback

1. Both values are 16: $4 \times 4 = 16$ and $(-4) \times (-4) = 16$. A square means multiplying a number by itself, not by 2. Retry: $7^2 = 49$ and $(-7)^2 = 49$. Remember that -7^2 , without brackets, is -49 .
2. $180 = 18 \times 10 = 2^2 \times 3^2 \times 5$. Count repeated occurrences of each prime. Retry: $72 = 2^3 \times 3^2$.
3. $0.49 = 49/100$ because the final digit is in the hundredths place. Retry: $0.09 = 9/100$ and $0.009 = 9/1000$; the zeros determine the places.

If a check was difficult, revisit the related earlier lesson before starting long division. There is no time limit or pass cutoff.

2 Squares and the meaning of the root sign

For a real number a , its square is $a^2 = a \times a$. Every real square is nonnegative: a positive or negative nonzero number squares to a positive number, and $0^2 = 0$. In this lesson, an integer perfect square is a nonnegative integer of the form n^2 , where n is an integer. Thus 0 and 1 are included.

For $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ means the unique nonnegative number whose square is a . This is the principal square root. The symbol $\sqrt{}$ does not ask for both signs. A negative number has no real square root, because no real number squares to a negative value; complex numbers are outside our scope.

Worked example 1 One principal root and two possible solutions

Compare $\sqrt{169}$ with all real solutions of $x^2 = 169$. Also find $\sqrt{0}$.

1. $13 \times 13 = 169$, so $\sqrt{169} = 13$.
2. $(-13) \times (-13) = 169$ as well. Therefore $x^2 = 169$ has solutions $x = 13$ and $x = -13$. The shorthand $x = \pm 13$ means these two alternatives.
3. $\sqrt{0} = 0$. The equation $x^2 = 0$ has only the solution $x = 0$; -0 and 0 are the same number.

Error check: $\sqrt{169} = \pm 13$ is incorrect. The equation has two solutions, while the principal-root symbol has one value. Similarly, $\sqrt{((-6)^2)} = \sqrt{36} = 6$, not -6 .

3 Use the last digit as a rejection test

Square each possible units digit 0 through 9. The units digits of the resulting squares are, in that order, 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1. Tens and higher places cannot change the units digit of the product. Therefore an integer square can end only in 0, 1, 4, 5, 6 or 9.

An integer ending in 2, 3, 7 or 8 is not a perfect square. An allowed ending is necessary, but it is not sufficient: it only means this quick test has not rejected the number. You still need a square, factorisation, or consecutive-square comparison to confirm it.

Worked example 2 An allowed ending is not a certificate

Can 746 and 728 be perfect squares?

1. 728 ends in 8, so it is not a perfect square.
2. 746 ends in 6, which is allowed. This alone gives no final answer.
3. $27^2 = 729$ and $28^2 = 784$. Since $729 < 746 < 784$, no integer can square to 746. It is not a perfect square either.

The squares of nonnegative integers increase as the integers increase. Between two consecutive integers there is no other integer whose square could fit the gap.

Error check: An allowed ending does not mean “definitely a square”. Do not apply this integer-ending test directly to the last written digit of a decimal.

4 Pair prime factors to find an integer root

When a positive integer is squared, its whole prime factorisation is repeated. Every prime therefore occurs an even number of times. Conversely, if every prime occurrence can be paired, taking one prime from each pair gives an integer whose square is the original number. This is both a test and a method. The integer 1 is a square with root 1; handle 0 separately rather than trying to prime-factorise it.

Worked example 3 Take one factor from each pair

Find $\sqrt{1764}$ by prime factorisation.

1. $1764 = 4 \times 441 = (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (7 \times 7)$.
2. Each prime has a partner: $1764 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2$.
3. Take one from each pair: $\sqrt{1764} = 2 \times 3 \times 7 = 42$.
4. Check by multiplication: $42 \times 42 = 1764$.

Error check: Take one factor from each pair, not one factor from the entire list. An unpaired prime means the positive integer is not an integer square. The root still exists as a real number, but is not an integer.

5 Repair odd prime counts with the smallest change

Here the multiplier and divisor must be positive integers. A divisor must divide the original number exactly, and the quotient must be an integer square.

For a positive integer N , identify the primes with odd counts in its factorisation. Multiply one copy of each such prime together.

- Multiplying N by this product adds one to each odd count and makes every count even.
- Dividing N by this product removes one from each odd count and also makes every count even.

Why is this the smallest positive choice? Each odd count needs an odd number of copies added or removed; at least one copy of that prime is unavoidable. Every qualifying multiplier or divisor must therefore contain the product just described. Including extra copies or other primes cannot produce a smaller positive integer. If N is already a square, the smallest multiplier and divisor are both 1.

Worked example 4 The smallest multiplier and the smallest divisor

Find both for 540.

1. $540 = 54 \times 10 = 2^2 \times 3^3 \times 5$.
2. The count of 2 is even. The counts of 3 and 5 are odd, so the required product is $3 \times 5 = 15$.
3. Multiply: $540 \times 15 = 2^2 \times 3^4 \times 5^2 = 8100 = 90^2$.
4. Divide: $540 \div 15 = 2^2 \times 3^2 = 36 = 6^2$.
5. Both answers are 15, but the resulting squares differ. The multiplication and division checks confirm each result.

Error check: Dividing by 540 gives 1, a square, but 540 is not the smallest qualifying divisor. Using only 3 or only 5 leaves the other odd count unresolved.

Pause and check

What is the smallest positive multiplier for 98? What is the smallest positive divisor of 98 that leaves an integer square?

Feedback: $98 = 2 \times 7^2$. Both answers are 2: $98 \times 2 = 196 = 14^2$ and $98 \div 2 = 49 = 7^2$. “Smallest” refers to the multiplier or divisor, not the resulting square.

6 Square-root long division one digit at a time

Long division finds root digits without first finding every prime factor. Each pair of input digits produces one root digit. All the steps below are written out; no picture is needed.

Pair the digits before calculating

Start at the decimal point, or at the units digit if no decimal point is written.

- In the integer part, make pairs towards the left. Only the leftmost group may have one digit: 4624 becomes 46 | 24, and 10404 becomes 1 | 04 | 04.
- In the fractional part, make pairs towards the right: 5.76 becomes 5 . 76. The dot is still the decimal point; the vertical bars only separate pairs, not division operations.
- If one fractional digit is left over, put a zero on its right: $354.7 = 354.70$, grouped as 3 | 54 . 70. Never add that zero to the integer part.
- To continue beyond the given decimal digits, append pairs of zeros after the decimal point. For example, $70 = 70.00\ 00\ \dots$. Each extra pair supplies one more decimal place of its root.

The repeatable procedure

1. From the leftmost integer group, choose the largest digit whose square does not exceed the group. Write this first root digit and subtract its square. For a number below 1, the integer group is 0 and the first root digit is 0.
2. Bring down the next pair. If the old remainder is r and the pair is p , the new working number is $100 \times r + p$. Bringing down 04 means adding 4 after multiplying the remainder by 100; the leading zero preserves the two places.
3. Let q be the root digits already found, read as a whole number without their decimal point. Try a next digit d from 0 to 9. Choose the largest d for which $(20 \times q + d) \times d$ does not exceed the new working number.
4. Subtract that product. Append d to the root digits, so the new prefix is $10 \times q + d$. Use this entire updated prefix for the next step. Repeat until all required pairs have been processed.
5. Put the root's decimal point immediately after the digits supplied by the integer groups, before processing the first fractional pair. A zero digit must still be written; do not skip its place.

The multiplier in step 3 is the new single digit d , not the entire updated root. If $q = 6$ and $d = 8$, the product to subtract is 128×8 , not 128×68 .

Why the trial product works

Suppose the next whole-number prefix is $10 \times q + d$. Multiplying it by itself gives:

$$(10 \times q + d)^2 = 100 \times q^2 + 20 \times q \times d + d^2 = 100 \times q^2 + (20 \times q + d) \times d.$$

Bringing down two input digits multiplies the previous processed number by 100 before adding the pair. The old square contribution is therefore $100 \times q^2$. The extra amount needed for the new digit is exactly $(20 \times q + d) \times d$. This explains both the digit pairing and the trial product, rather than treating “double and attach” as an unexplained trick.

Worked example 5 Integer and decimal long division

A Find $\sqrt{4624}$

Groups: 46 | 24.

1. First group 46: $6^2 = 36 \leq 46$, while $7^2 = 49 > 46$. First root digit = 6; remainder = $46 - 36 = 10$.
2. Bring down 24: working number = $100 \times 10 + 24 = 1024$.
3. Current prefix $q = 6$, so try $(120 + d) \times d$. Digit 8 gives $128 \times 8 = 1024$; digit 9 gives $129 \times 9 = 1161$, too large. Choose 8.
4. New prefix = 68; remainder = $1024 - 1024 = 0$. All pairs are used, so $\sqrt{4624} = 68$ exactly. Check: $68^2 = 4624$.

Digit pairs for $\sqrt{4624}$

46 | 24

Digit group	Working number	Chosen digit and product	Remainder	Root digits
46	46	6; $6 \times 6 = 36$	10	6
24	$100 \times 10 + 24 = 1024$	8; $(120 + 8) \times 8 = 1024$	0	68

Bring down one pair at a time. With current prefix 6, the next digit 8 gives $(20 \times 6 + 8) \times 8 = 1024$. Multiply by the next digit 8, not the new whole root 68. Check: $68^2 = 4624$.

B Find $\sqrt{5.76}$

Groups: 5 . 76.

1. First group 5: $2^2 = 4 \leq 5 < 3^2$. First root digit = 2; remainder = 1.
2. All integer groups are used, so put the decimal point after 2.
3. Bring down 76: working number = $100 \times 1 + 76 = 176$. The current digit prefix is $q = 2$.
4. Choose $d = 4$ because $(40 + 4) \times 4 = 176$, while $(40 + 5) \times 5 = 225$ is too large. The remainder is 0.
5. The fractional pair supplies the tenths digit 4, so $\sqrt{5.76} = 2.4$. Check: $2.4 \times 2.4 = 5.76$.

Decimal pairing for $\sqrt{5.76}$

5 . 76

Digit group	Working number	Chosen digit and product	Remainder	Written root
5	5	2; $2 \times 2 = 4$	1	2
76	$100 \times 1 + 76 = 176$	4; $(40 + 4) \times 4 = 176$	0	2.4

The given number has one integer group (the single digit 5) before the decimal point, so write one root digit before its decimal point. The fractional pair 76 supplies the next digit 4. Check: $2.4^2 = 5.76$.

C Keep a zero digit and update the whole prefix

For $\sqrt{10404}$, use groups 1 | 04 | 04.

1. First group 1 gives root prefix 1 and remainder 0.
2. Bring down 04 to get 4. Digit 1 would require $(20 + 1) \times 1 = 21 > 4$, so choose digit 0. Write root prefix 10 and keep remainder 4.
3. Bring down 04: working number = $100 \times 4 + 4 = 404$. Now $q = 10$, not 1 and not the last digit 0.
4. Choose digit 2: $(200 + 2) \times 2 = 404$. Digit 3 would give 609, too large. Root = 102 and remainder = 0; check $102^2 = 10404$.

A zero remainder is not permission to stop when unused nonzero pairs remain. In part C the first remainder was zero, but both 04 groups still mattered. If the remainder is zero and all remaining pairs are 00, continue them or fill the corresponding root places with zeros. Stop with an exact result only when the required places are accounted for and the remainder is zero.

Check the decimal position

Try grouping 0.0009 before reading the answer.

Feedback: 0 . 00 | 09. The integer group gives root 0. The first fractional pair 00 gives tenths digit 0. For the next pair 09, $q = 0$ and $d = 3$ gives $(0 + 3) \times 3 = 9$, so the hundredths digit is 3. Hence $\sqrt{0.0009} = 0.03$; $(0.03)^2 = 0.0009$. Omitting the zero in the tenths place would give the wrong answer 0.3.

If the remainder stays nonzero, more pairs give more digits; a stopped decimal is not automatically the exact root. For rounding to a chosen decimal place, find at least the following digit and apply the rounding rule from the previous lesson.

7 Exact fractions and sensible bounds

For $a \geq 0$ and $b > 0$, $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$. In elementary exact problems, check whether numerator and denominator are squares after simplifying the fraction. The fraction rule works because the nonnegative quotient on the right squares to a/b . In particular, $\sqrt{(49/100)} = 7/10 = 0.7$, so $\sqrt{0.49} = 0.7$, not 0.07.

Worked example 6 Exact value or bounded estimate

A Find $\sqrt{(81/196)}$

$81 = 9^2$ and $196 = 14^2$. Therefore $\sqrt{(81/196)} = 9/14$. Check: $(9/14) \times (9/14) = 81/196$. Both numerator and denominator contribute to the root.

B Locate $\sqrt{70}$ and refine the estimate

1. $8^2 = 64 < 70 < 81 = 9^2$, so $8 < \sqrt{70} < 9$. These are consecutive-integer bounds.
2. The interval does not imply that the root is its midpoint 8.5. Indeed $8.5^2 = 72.25$, not 70.
3. For a tighter interval, $8.3^2 = 68.89 < 70$ and $8.4^2 = 70.56 > 70$, so $8.3 < \sqrt{70} < 8.4$.
4. To round to the nearest tenth, check the midpoint 8.35: $8.35^2 = 69.7225 < 70$, so $\sqrt{70}$ is above 8.35. Hence $\sqrt{70} \approx 8.4$ to the nearest tenth. Write $\approx$ for the approximation, not $=$.

A short rational and irrational distinction

A rational number can be written as p/q with integers p and $q \neq 0$. Its decimal representation terminates or eventually repeats a fixed digit block. An irrational number cannot be written in that form; its decimal neither terminates nor eventually repeats.

For a nonnegative integer N , $\sqrt{N}$ is rational exactly when N is a perfect square. Thus $\sqrt{81} = 9$ is rational, while $\sqrt{70}$ is irrational. A brief reason uses the prime counts you already know: if $\sqrt{N} = p/q$ in lowest terms with $q > 0$, then $p^2 = N \times q^2$. Any prime dividing q would divide p^2 and hence p , contradicting lowest terms. Therefore $q = 1$; the root must be an integer, and N must be its square. For $N = 0$, the root is simply 0.

A calculator's finite display of $\sqrt{70}$ is an approximation, not evidence of a terminating exact decimal. Not every radical is irrational: $\sqrt{0.49} = 0.7$ and $\sqrt{(81/196)} = 9/14$ are rational.

8 Products and sums behave differently

For nonnegative real a and b , $\sqrt{(a \times b)} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. For division, also require $b > 0$. These rules follow by squaring the proposed nonnegative result. They do not supply a corresponding rule for a sum.

Worked example 7 Disprove a root of a sum shortcut

Is $\sqrt{(16 + 9)} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$?

1. Left side: $\sqrt{(16 + 9)} = \sqrt{25} = 5$.
2. Right side: $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$.
3. Since $5 \neq 7$, the claimed equality is false. The entire sum under the root must be evaluated first.

Error check: One counterexample disproves a general rule. The statement is not "the two sides can never be equal": if one term is zero, they do agree. The point is that there is no rule allowing this split for every pair of nonnegative numbers.

9 Independent practice

Attempt all twelve questions before the answer key. Choose one option for each question and write a reason or calculation. This is original formative practice without timing, negative marking or a pass cutoff; it is not a full RRB CBT simulation.

1. What is 23^2 ?

- A. 46
 - B. 69
 - C. 529
 - D. 523
-

2. What is the principal root $\sqrt{225}$?

- A. -15
 - B. 15
 - C. ± 15
 - D. 25
-

3. What is $\sqrt{0}$?

- A. -1
 - B. 1
 - C. Undefined
 - D. 0
-

4. Which units digit immediately rules out an integer perfect square?

- A. 2
 - B. 4
 - C. 6
 - D. 9
-

5. Use prime factorisation to find $\sqrt{2025}$.

- A. 40
 - B. 45
 - C. 55
 - D. 90
-

6. What is the smallest positive integer by which 588 must be multiplied to obtain an integer perfect square?

- A. 2
 - B. 6
 - C. 12
 - D. 3
-

7. What is the smallest positive integer divisor of 720 that leaves an integer perfect-square quotient?

- A. 5
 - B. 10
 - C. 15
 - D. 20
-

8. Use digit-pair long division to find $\sqrt{10.24}$.

- A. 0.32
 - B. 32
 - C. 3.2
 - D. 5.12
-

9. Find $\sqrt{(121/144)}$.

- A. $11/144$
 - B. $121/12$
 - C. $12/11$
 - D. $11/12$
-

10. Which consecutive-integer bounds contain $\sqrt{150}$?

- A. $10 < \sqrt{150} < 11$
 - B. $12 < \sqrt{150} < 13$
 - C. $14 < \sqrt{150} < 15$
 - D. $150 < \sqrt{150} < 151$
-

11. Which correctly gives $\sqrt{64}$ and all real solutions of $x^2 = 64$?

- A. $\sqrt{64} = \pm 8$; $x = 8$ or -8
 - B. $\sqrt{64} = -8$; $x = 8$ only
 - C. $\sqrt{64} = 8$; $x = 8$ or -8
 - D. $\sqrt{64} = 8$; $x = 8$ only
-

12. Which evaluation and conclusion correctly check the claim $\sqrt{(25 + 144)} = \sqrt{25} + \sqrt{144}$?

- A. False: left side 13, right side 17
 - B. True: both sides 17
 - C. True: both sides 13
 - D. False: left side 169, right side 17
-

10 Explained answer key

1. **C.** 23^2 means 23×23 . Multiply $23 \times 20 = 460$ and $23 \times 3 = 69$, then add: $460 + 69 = 529$. Multiplying by 2 gives 46, which is not squaring.
2. **B.** $15^2 = 225$ and 15 is nonnegative, so $\sqrt{225} = 15$. Both signs solve $x^2 = 225$, but the radical denotes only the principal root.
3. **D.** $0^2 = 0$, so $\sqrt{0} = 0$. A root of zero is defined. Do not confuse it with division by zero, which is undefined.
4. **A.** Squaring the digits 0 through 9 produces only units digits 0, 1, 4, 5, 6 and 9. An ending of 2 is impossible. The allowed endings 4, 6 and 9 alone do not prove a square.
5. **B.** $2025 = 81 \times 25 = 3^4 \times 5^2$. Taking one factor from each pair gives $3^2 \times 5 = 45$. Check: $45^2 = 2025$.
6. **D.** $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$. Only the prime 3 has an odd count, so the smallest multiplier is 3. Then $588 \times 3 = 1764 = 42^2$. The multiplier 12 also works but is not the smallest.
7. **A.** $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$. Remove one factor 5 to make all prime counts even: $720 \div 5 = 144 = 12^2$. Any qualifying divisor must include 5, so 5 is the smallest.
8. **C.** Group 10 . 24. First digit 3 gives $3^2 = 9$ and remainder 1. Put the root decimal after 3. Bring down 24 to get 124; choose 2 because $(60 + 2) \times 2 = 124$. Thus $\sqrt{10.24} = 3.2$; check $3.2^2 = 10.24$.
9. **D.** The numerator is 11^2 and the denominator is 12^2 , so the nonnegative root is $11/12$. Squaring both numerator and denominator checks the result. The root is less than 1, as $121/144$ is less than 1.
10. **B.** $12^2 = 144 < 150 < 169 = 13^2$, so $12 < \sqrt{150} < 13$. These bounds do not claim the root equals 12.5; that number would square to 156.25.
11. **C.** The radical selects the nonnegative root 8. Both 8^2 and $(-8)^2$ equal 64, so the equation has both solutions. A list containing only 8 omits a real solution.
12. **A.** The left side is $\sqrt{169} = 13$, whereas the right side is $5 + 12 = 17$. Since $13 \neq 17$, the claim is false. On the left, adding inside the root is not the last step; take the root of the sum.

Before moving on

Explain aloud why an allowed final digit is not enough, why a trial digit is multiplied by the trial divisor rather than the whole new root, and why a decimal point or zero digit cannot be skipped. If a practice error remains, redo the matching worked block and check your result by squaring.

11 Sources and scope note

- RRB CEN 09/2025 §14.1, Mathematics syllabus: https://www.rrbthiruvananthapuram.gov.in/assets/pdf/FinalDetailed_CEN_092025_Level1updated_on_30012026.pdf#page=28. Used for topic scope; the official indexed text was inspected, but the PDF binary was not verified in this source check.

- NCERT Class VIII Mathematics Chapter 5 via IIT Kanpur SATHEE: §§5.1-5.2, 5.5.1, 5.5.3-5.5.4 and 5.6, for squares, root meaning, factorisation and digit-pair methods: <https://sathee.iitk.ac.in/sathee-railway-exams/student-corner/ncert-books/class-08/mathematics/chapter-5-squares-and-square-roots/>. Relevant official indexed text was inspected; the official-host printed edition and page layout were not authenticated.
- NIOS Secondary Mathematics 211 Chapter 1, rational and irrational numbers, particularly §1.10, printed p.28: <https://digital.nios.ac.in/content/211en/Chapter-1.pdf>.
- Visual cross-check only: a third-party-hosted NCERT-labelled Reprint 2024-25 chapter at <https://ncert24.com/assets/ots/pdf/ncert-books-class-8-maths-chapter-5.pdf>, §§5.5.4-5.6, printed pp.65-68. Its byte identity with an official-host NCERT PDF remains unverified. No source page, figure or worked layout is reproduced here.

The explanations, solutions and text layouts in this lesson were authored independently. Standard mathematical target numbers may also occur in textbook tables or exercises. The trial-digit recurrence and numerical steps were checked independently; source wording is not an algorithm specification.

A concrete way to picture the idea

From a square arrangement back to one side

Imagine 49 identical tiles arranged in a square grid. The same number of tiles must run across each row and down each column. Seven rows of seven tiles use $7 \times 7 = 49$ tiles, so the number along one side is $\sqrt{49} = 7$.

The count along a side cannot be -7 . This helps explain why the principal square root is nonnegative. In a separate number equation, however, both 7 and -7 solve $x^2 = 49$ because both square to 49. The physical tile model does not represent the negative solution.

If there are 50 tiles, they cannot all make a completely filled square grid with an integer number of tiles along each side. That does not mean $\sqrt{50}$ has no real value; it lies between 7 and 8. The tile comparison explains integer squares and the principal-root choice, not the full long-division procedure.

Quick reference

Meaning and signs

- $a^2 = a \times a$; every real square is nonnegative
- For $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ is the nonnegative principal root; $\sqrt{0} = 0$
- For $a > 0$, $x^2 = a$ has solutions $x = \sqrt{a}$ and $x = -\sqrt{a}$; $x^2 = 0$ has only $x = 0$
- A negative number has no real square root; $\sqrt{(-6)^2} = 6$

Integer square checks

- Allowed last digits: 0, 1, 4, 5, 6, 9; an allowed ending does not prove a square
- Last digit 2, 3, 7 or 8 rules out an integer square
- A positive integer is a square exactly when every prime count is even; take one factor per pair for its root
- 0 and 1 are squares; do not prime-factorise 0
- Smallest positive integer multiplier or exact divisor producing an integer square: multiply one copy of each prime with an odd count; if none, use 1

Digit-pair long division

1. Pair integer digits to the left and decimal digits to the right from the decimal point. Pad a lone final fractional digit with a zero on its right
2. First group: choose the largest digit whose square fits, and subtract that square
3. Bring down the next pair p : new working number = $100 \times \text{old remainder} + p$
4. With current root digits read as the integer q , choose the largest digit d from 0 to 9 such that $(20 \times q + d) \times d$ fits
5. Subtract that product; append d to give new prefix $10 \times q + d$. Use the whole new prefix next time, ignoring its decimal point in the trial calculation
6. Put the root decimal after the integer groups are finished. Keep zero root digits. Additional 00 pairs after the decimal give additional root places

Multiply by the new digit, not the whole new root. A zero remainder gives an exact answer only when all required places are accounted for. Otherwise continue or label the stated-precision result with $\approx$.

Fractions estimates and error checks

- For $a \geq 0$ and $b > 0$, $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$; check by squaring
- For $a, b \geq 0$, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; there is no general rule $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- If $k \geq 0$ and $k^2 < N < (k + 1)^2$, then $k < \sqrt{N} < k + 1$; bounds do not make the root their midpoint
- For nonnegative integer N , $\sqrt{N}$ is rational exactly when N is a perfect square; a finite calculator display is not proof of exactness
- Preserve exact values until a rounding instruction requires an estimate; report the requested precision

वर्ग वर्गमूल और उचित अनुमान

आप क्या सीखेंगे

वर्गमूल के उत्तर में सही मान के साथ सही अर्थ भी जरूरी है। इस पाठ में आप:

- वर्ग करना, मुख्य वर्गमूल निकालना और वर्ग वाली समीकरण के हल ढूँढ़ना अलग-अलग पहचानेंगे
- असंभव पूर्ण वर्गों को पहचानेंगे और अभाज्य गुणनखंडों के जोड़ों से पूर्ण वर्ग की पुष्टि करेंगे
- सबसे छोटा धनात्मक पूर्णांक गुणक या सटीक भाजक निकालेंगे, जिससे पूर्ण वर्ग पूर्णांक मिले
- अंकों के जोड़े बनाकर दीर्घ भाग विधि से पूर्णांकों और दशमलव संख्याओं के वर्गमूल निकालेंगे
- भिन्न के सटीक वर्गमूल निकालेंगे, अन्य वर्गमूलों की सीमाएँ तय करेंगे और अनुमान को स्पष्ट लिखेंगे

RRB CEN 09/2025 के §14.1 में गणित के पाठ्यक्रम में वर्गमूल दिया गया है। यह आधारभूत पाठ परीक्षा में किसी विषय के प्रश्नों की संख्या का अनुमान नहीं लगाता। इसमें पिछले पाठों का अभाज्य गुणनखंडन और भिन्न तथा दशमलव का ज्ञान काम आएगा। करणी के उन्नत नियम, हर का परिमेयकरण और घनमूल इस पाठ के बाहर हैं।

1 शुरू करने से पहले

प्रतिक्रिया पढ़ने से पहले ये तीन बातें याद करके हल करें।

1. 4^2 और $(-4)^2$ के मान निकालिए।
2. 180 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखिए।
3. 0.49 को ऐसे भिन्न में लिखिए जिसका अंश और हर पूर्णांक हों।

प्रतिक्रिया और दोबारा अभ्यास

1. दोनों मान 16 हैं: $4 \times 4 = 16$ और $(-4) \times (-4) = 16$ । वर्ग का अर्थ संख्या को उसी संख्या से गुणा करना है, 2 से नहीं। दोबारा देखें: $7^2 = 49$ और $(-7)^2 = 49$ । याद रखें कि बिना कोष्ठक के -7^2 का मान -49 है।
2. $180 = 18 \times 10 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ । हर अभाज्य गुणनखंड कितनी बार आया है, यह गिनें। दोबारा अभ्यास: $72 = 2^3 \times 3^2$ ।
3. $0.49 = 49/100$, क्योंकि अंतिम अंक शतांश के स्थान पर है। दोबारा देखें: $0.09 = 9/100$ और $0.009 = 9/1000$; शून्य अंकों के स्थान तय करते हैं।

किसी प्रश्न में कठिनाई हुई हो, तो दीर्घ भाग शुरू करने से पहले संबंधित पिछला पाठ दोहराएँ। यहाँ समय-सीमा या उत्तीर्ण होने की न्यूनतम अंक-शर्त नहीं है।

2 वर्ग और वर्गमूल चिह्न का अर्थ

वास्तविक संख्या a का वर्ग $a^2 = a \times a$ है। वास्तविक संख्या का वर्ग कभी ऋणात्मक नहीं होता: अशून्य धनात्मक या ऋणात्मक संख्या का वर्ग धनात्मक होता है, और $0^2 = 0$ । इस पाठ में पूर्ण वर्ग पूर्णांक वह अऋणात्मक पूर्णांक है जिसे किसी पूर्णांक n के लिए n^2 लिखा जा सके। इसलिए 0 और 1 भी पूर्ण वर्ग हैं। अऋणात्मक का अर्थ शून्य या धनात्मक है।

$a \geq 0$ के लिए $\sqrt{a}$ उस एक अऋणात्मक संख्या को दर्शाता है जिसका वर्ग a है। इसे मुख्य वर्गमूल कहते हैं। $\sqrt{}$ चिह्न दोनों चिह्न वाले उत्तर नहीं माँगता। ऋणात्मक संख्या का वास्तविक वर्गमूल नहीं होता, क्योंकि किसी वास्तविक संख्या का वर्ग ऋणात्मक नहीं हो सकता; सम्मिश्र संख्याएँ हमारे पाठ के बाहर हैं।

हल किया उदाहरण 1 एक मुख्य वर्गमूल और दो संभव हल

$\sqrt{169}$ की तुलना $x^2 = 169$ के सभी वास्तविक हलों से करें। $\sqrt{0}$ भी निकालें।

1. $13 \times 13 = 169$, इसलिए $\sqrt{169} = 13$ ।

2. $(-13) \times (-13) = 169$ भी है। इसलिए $x^2 = 169$ के हल $x = 13$ और $x = -13$ हैं। संक्षेप में $x = \pm 13$ लिखने का अर्थ यही दो विकल्प हैं।

3. $\sqrt{0} = 0$ । समीकरण $x^2 = 0$ का केवल एक हल $x = 0$ है; -0 और 0 एक ही संख्या हैं।

गलती की जाँच: $\sqrt{169} = \pm 13$ लिखना गलत है। समीकरण के दो हल हैं, लेकिन मुख्य वर्गमूल चिह्न का एक मान है। इसी तरह $\sqrt{((-6)^2)} = \sqrt{36} = 6$ है, -6 नहीं।

3 अंतिम अंक से असंभव पूर्ण वर्ग हटाएँ

इकाई के हर संभव अंक 0 से 9 का वर्ग करें। प्राप्त वर्गों के इकाई अंक इसी क्रम में 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 हैं। दहाई या उससे बड़े स्थान गुणनफल के इकाई अंक को नहीं बदलते। इसलिए किसी पूर्णांक का वर्ग केवल 0, 1, 4, 5, 6 या 9 पर समाप्त हो सकता है।

जिस पूर्णांक का अंतिम अंक 2, 3, 7 या 8 है, वह पूर्ण वर्ग नहीं है। स्वीकार्य अंतिम अंक होना जरूरी है, लेकिन इतना पर्याप्त नहीं है: इसका अर्थ केवल यह है कि इस छोटी जाँच ने संख्या को अस्वीकार नहीं किया। पुष्टि के लिए वर्ग करके, गुणनखंडन करके या क्रमागत पूर्णाकों के वर्गों से तुलना करके देखना होगा।

हल किया उदाहरण 2 स्वीकार्य अंतिम अंक प्रमाण नहीं है

क्या 746 और 728 पूर्ण वर्ग हो सकते हैं?

1. 728 का अंतिम अंक 8 है, इसलिए वह पूर्ण वर्ग नहीं है।

2. 746 का अंतिम अंक 6 है, जो स्वीकार्य है। इससे अकेले अंतिम निर्णय नहीं मिलता।

3. $27^2 = 729$ और $28^2 = 784$ । चूँकि $729 < 746 < 784$, किसी पूर्णांक का वर्ग 746 नहीं हो सकता। यह भी पूर्ण वर्ग नहीं है।

अऋणात्मक पूर्णांक बढ़ने पर उनके वर्ग भी बढ़ते हैं। दो क्रमागत पूर्णाकों के बीच कोई अन्य पूर्णांक नहीं होता जिसका वर्ग इस अंतराल में आ सके।

गलती की जाँच: स्वीकार्य अंतिम अंक का अर्थ “निश्चित रूप से पूर्ण वर्ग” नहीं है। पूर्णाकों की इस जाँच को दशमलव संख्या के अंतिम लिखे अंक पर सीधे न लगाएँ।

4 अभाज्य गुणनखंडों के जोड़ों से पूर्णांक वर्गमूल

किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग करते समय उसका पूरा अभाज्य गुणनखंडन दोहरता है। इसलिए हर अभाज्य गुणनखंड सम संख्या में आता है। उलटे, यदि हर अभाज्य गुणनखंड का जोड़ा बन जाए, तो प्रत्येक जोड़े से एक गुणनखंड लेने पर ऐसी पूर्णांक संख्या मिलती है जिसका वर्ग मूल संख्या है। यह जाँच भी है और वर्गमूल निकालने की विधि भी। पूर्णांक 1 का वर्गमूल 1 है। 0 का अभाज्य गुणनखंडन करने की कोशिश न करें; उसका वर्गमूल अलग से 0 है।

हल किया उदाहरण 3 हर जोड़े से एक गुणनखंड

अभाज्य गुणनखंडन से $\sqrt{1764}$ निकालिए।

1. $1764 = 4 \times 441 = (2 \times 2) \times (3 \times 3) \times (7 \times 7)$ ।
2. हर अभाज्य गुणनखंड का साथी है: $1764 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2$ ।
3. प्रत्येक जोड़े से एक लें: $\sqrt{1764} = 2 \times 3 \times 7 = 42$ ।
4. गुणा करके जाँचें: $42 \times 42 = 1764$ ।

गलती की जाँच: हर जोड़े से एक गुणनखंड लेना है, पूरी सूची से केवल एक नहीं। कोई अभाज्य गुणनखंड बिना जोड़े के बचे, तो धनात्मक पूर्णांक पूर्ण वर्ग नहीं है। उसका वास्तविक वर्गमूल फिर भी है, लेकिन वह पूर्णांक नहीं है।

5 विषम गिनती को सबसे छोटे गुणक या भाजक से बदलें

यहाँ गुणक और भाजक धनात्मक पूर्णांक होने चाहिए। भाजक से मूल संख्या पूरी तरह विभाजित होनी चाहिए और भागफल पूर्ण वर्ग पूर्णांक होना चाहिए।

धनात्मक पूर्णांक N के गुणनखंडन में उन अभाज्य गुणनखंडों को पहचानें जिनकी गिनती विषम है। ऐसे हर अभाज्य गुणनखंड की एक-एक प्रति लेकर उनका गुणनफल बनाएँ।

- N को इस गुणनफल से गुणा करने पर हर विषम गिनती में 1 जुड़ता है और सभी गिनतियाँ सम हो जाती हैं।
- N को इस गुणनफल से भाग देने पर हर विषम गिनती से 1 घटता है और सभी गिनतियाँ सम हो जाती हैं।

यही सबसे छोटा धनात्मक विकल्प क्यों है? हर विषम गिनती को सम करने के लिए उस अभाज्य गुणनखंड की विषम संख्या में प्रतियाँ जोड़नी या हटानी होंगी; कम से कम एक प्रति जरूरी है। इसलिए शर्त पूरी करने वाले हर गुणक या भाजक में ऊपर बना गुणनफल अवश्य शामिल होगा। अतिरिक्त प्रतियाँ या दूसरे अभाज्य गुणनखंड लेने से उससे छोटा धनात्मक पूर्णांक नहीं मिल सकता। यदि N पहले से पूर्ण वर्ग है, तो सबसे छोटा गुणक और भाजक दोनों 1 हैं।

हल किया उदाहरण 4 सबसे छोटा गुणक और सबसे छोटा भाजक

540 के लिए दोनों निकालिए।

1. $540 = 54 \times 10 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ ।
2. 2 की गिनती सम है। 3 और 5 की गिनती विषम है, इसलिए आवश्यक गुणनफल $3 \times 5 = 15$ है।
3. गुणा: $540 \times 15 = 2^2 \times 3^4 \times 5^2 = 8100 = 90^2$ ।
4. भाग: $540 \div 15 = 2^2 \times 3^2 = 36 = 6^2$ ।
5. दोनों उत्तर 15 हैं, लेकिन प्राप्त पूर्ण वर्ग अलग हैं। गुणा और भाग की जाँच से दोनों परिणाम पुष्ट होते हैं।

गलती की जाँच: 540 से भाग देने पर 1 मिलता है, जो पूर्ण वर्ग है, लेकिन 540 सबसे छोटा उपयुक्त भाजक नहीं है। केवल 3 या केवल 5 लेने पर दूसरे अभाज्य गुणनखंड की विषम गिनती बची रहेगी।

रुककर जाँचें

98 के लिए सबसे छोटा धनात्मक गुणक क्या है? 98 का सबसे छोटा धनात्मक भाजक क्या है जिससे भाग देने पर पूर्ण वर्ग पूर्णांक मिले?

प्रतिक्रिया: $98 = 2 \times 7^2$ । दोनों उत्तर 2 हैं: $98 \times 2 = 196 = 14^2$ और $98 \div 2 = 49 = 7^2$ । “सबसे छोटा” गुणक या भाजक होना है, प्राप्त पूर्ण वर्ग नहीं।

6 दीर्घ भाग से एक-एक अंक करके वर्गमूल

दीर्घ भाग विधि में पहले सारे अभाज्य गुणनखंड निकालने की जरूरत नहीं होती। दी गई संख्या के अंकों का हर जोड़ा वर्गमूल का एक अंक देता है। नीचे सभी चरण लिखे हैं; समझने के लिए चित्र जरूरी नहीं है।

गणना से पहले अंकों के जोड़े बनाएँ

दशमलव बिंदु से शुरू करें। दशमलव बिंदु न लिखा हो, तो इकाई के अंक से शुरू करें।

- पूर्णांक भाग में बाईं ओर चलते हुए जोड़े बनाएँ। केवल सबसे बाएँ समूह में एक अंक हो सकता है: 4624 के समूह 46 | 24 और 10404 के समूह 1 | 04 | 04 हैं।
- दशमलव के बाद दाईं ओर चलते हुए जोड़े बनाएँ: 5.76 के समूह 5 . 76 हैं। बिंदु अब भी दशमलव बिंदु है; खड़ी रेखाएँ केवल जोड़े अलग करती हैं, भाग की संक्रिया नहीं दिखातीं।
- दशमलव के बाद अंत में एक अंक बच जाए, तो उसके दाईं ओर शून्य लगाएँ: $354.7 = 354.70$, जिसके समूह 3 | 54 . 70 हैं। यह शून्य पूर्णांक भाग में कभी न जोड़ें।
- दिए दशमलव अंकों से आगे गणना करने के लिए दशमलव के बाद शून्यों के जोड़े लगाएँ। जैसे $70 = 70.00\ 00 \dots$ । प्रत्येक अतिरिक्त जोड़ा वर्गमूल का एक और दशमलव स्थान देता है।

हर बार अपनाने वाले चरण

1. सबसे बाएँ पूर्णांक समूह के लिए वह सबसे बड़ा अंक चुनें जिसका वर्ग उस समूह से अधिक न हो। वर्गमूल का यह पहला अंक लिखें और उसका वर्ग घटाएँ। 1 से छोटी संख्या के लिए पूर्णांक समूह 0 है और वर्गमूल का पहला अंक 0 होगा।
 2. अगला जोड़ा नीचे लाएँ। पुराना शेष r और अगला जोड़ा p हो, तो नई गणना संख्या $100 \times r + p$ है। 04 नीचे लाने का अर्थ शेष को 100 से गुणा करके 4 जोड़ना है; शुरू का शून्य दोनों स्थान सुरक्षित रखता है।
 3. अब तक मिले वर्गमूल के अंकों को दशमलव बिंदु हटाकर एक पूर्णांक q की तरह पढ़ें। अगला अंक d , 0 से 9 में से चुनें। सबसे बड़ा ऐसा d लें जिसके लिए $(20 \times q + d) \times d$ नई गणना संख्या से अधिक न हो।
 4. इस गुणनफल को घटाएँ। वर्गमूल के अंकों के अंत में d लिखें, इसलिए अब तक के अंकों से बनी नई संख्या $10 \times q + d$ होगी। अगले चरण में यही पूरी नई संख्या इस्तेमाल करें। सभी आवश्यक जोड़ों तक प्रक्रिया दोहराएँ।
 5. पूर्णांक समूहों से मिले अंकों के तुरंत बाद वर्गमूल में दशमलव बिंदु रखें, अर्थात् पहले दशमलव जोड़े की गणना से पहले। कोई अंक 0 आए, तो भी लिखें; उसका स्थान न छोड़ें।
- चरण 3 में गुणा नए एकल अंक d से करना है, पूरे नए वर्गमूल से नहीं। $q = 6$ और $d = 8$ होने पर घटाने वाला गुणनफल 128×8 है, 128×68 नहीं।

जाँच वाला गुणनफल क्यों काम करता है

मान लें कि अब तक के अंकों से बनने वाली अगली पूर्णांक संख्या $10 \times q + d$ है। इसे स्वयं से गुणा करने पर:

$$(10 \times q + d)^2 = 100 \times q^2 + 20 \times q \times d + d^2 = 100 \times q^2 + (20 \times q + d) \times d$$

अगले दो अंक नीचे लाने पर पहले तक संसाधित संख्या को 100 से गुणा करके अगला जोड़ा जोड़ा जाता है। पुराने वर्ग का योगदान अब $100 \times q^2$ है। नए अंक के लिए अतिरिक्त आवश्यक भाग ठीक $(20 \times q + d) \times d$ है। इससे अंकों के जोड़े बनाने और जाँच वाले गुणनफल का कारण समझ आता है; “दुगुना करके अंक जोड़ें” केवल रटी हुई तरकीब नहीं रह जाती।

हल किया उदाहरण 5 पूर्णांक और दशमलव की दीर्घ भाग विधि

A $\sqrt{4624}$ निकालिए

समूह: 46 | 24।

1. पहला समूह 46: $6^2 = 36 \leq 46$, जबकि $7^2 = 49 > 46$ । वर्गमूल का पहला अंक = 6; शेष = $46 - 36 = 10$ ।

2. 24 नीचे लाएँ: नई गणना संख्या = $100 \times 10 + 24 = 1024$ ।

3. अब तक के वर्गमूल अंकों से बनी संख्या $q = 6$ है, इसलिए $(120 + d) \times d$ जाँचें। अंक 8 से $128 \times 8 = 1024$ मिलता है; अंक 9 से $129 \times 9 = 1161$ मिलता है, जो बड़ा है। 8 चुनें।

4. नए अंक मिलकर 68 बने; शेष = $1024 - 1024 = 0$ । सभी जोड़े इस्तेमाल हो गए, इसलिए सटीक मान $\sqrt{4624} = 68$ है। जाँच: $68^2 = 4624$ ।

$\sqrt{4624}$ के अंक-युग्म

46 | 24

अंक-समूह	गणना की संख्या	चुना अंक और गुणनफल	शेषफल	मूल के अंक
46	46	6; $6 \times 6 = 36$	10	6
24	$100 \times 10 + 24 = 1024$	8; $(120 + 8) \times 8 = 1024$	0	68

एक बार में एक अंक-युग्म उतारें। अब तक का मूल 6 होने पर अगला अंक 8 देता है: $(20 \times 6 + 8) \times 8 = 1024$ । अगले अंक 8 से गुणा करें, नए पूरे मूल 68 से नहीं। जाँच: $68^2 = 4624$ ।

B $\sqrt{5.76}$ निकालिए

समूह: 5 . 76।

1. पहला समूह 5: $2^2 = 4 \leq 5 < 3^2$ । पहला वर्गमूल अंक = 2; शेष = 1।

2. सभी पूर्णांक समूह इस्तेमाल हो गए, इसलिए 2 के बाद दशमलव बिंदु रखें।

3. 76 नीचे लाएँ: नई गणना संख्या = $100 \times 1 + 76 = 176$ । अब तक के वर्गमूल अंकों से बनी संख्या $q = 2$ है।

4. $d = 4$ चुनें, क्योंकि $(40 + 4) \times 4 = 176$, जबकि $(40 + 5) \times 5 = 225$ बड़ा है। शेष 0 है।

5. दशमलव का यह जोड़ा वर्गमूल के दशांश स्थान का अंक 4 देता है, इसलिए $\sqrt{5.76} = 2.4$ । जाँच: $2.4 \times 2.4 = 5.76$ ।

$\sqrt{5.76}$ के लिए दशमलव के अंक-युग्म

5 . 76

अंक-समूह	गणना की संख्या	चुना अंक और गुणनफल	शेषफल	लिखा गया मूल
5	5	2; $2 \times 2 = 4$	1	2
76	$100 \times 1 + 76 = 176$	4; $(40 + 4) \times 4 = 176$	0	2.4

दी गई संख्या में दशमलव से पहले एक पूर्णांक समूह (अकेला अंक 5) है, इसलिए वर्गमूल में दशमलव से पहले एक अंक लिखें। दशमलव के बाद का अंक-युग्म 76 अगला अंक 4 देता है। जाँच: $2.4^2 = 5.76$ ।

C शून्य अंक भी लिखें और अब तक के सभी अंक इस्तेमाल करें

$\sqrt{10404}$ के लिए समूह 1 | 04 | 04 लें।

1. पहले समूह 1 से वर्गमूल का पहला अंक 1 और शेष 0 मिलता है।

2. 04 नीचे लाने पर 4 मिलता है। अंक 1 के लिए $(20 + 1) \times 1 = 21 > 4$ चाहिए, इसलिए अंक 0 चुनें। अब तक के वर्गमूल अंक 10 लिखें और शेष 4 रखें।

3. अगला 04 नीचे लाएँ: नई गणना संख्या = $100 \times 4 + 4 = 404$ । अब $q = 10$ है, न कि 1 या केवल अंतिम अंक 0।

4. अंक 2 चुनें: $(200 + 2) \times 2 = 404$ । अंक 3 से 609 मिलता, जो बड़ा है। वर्गमूल = 102 और शेष = 0; जाँचें कि $102^2 = 10404$ ।

यदि अशून्य जोड़े बाकी हैं, तो शेष 0 होते ही रुकना सही नहीं है। भाग C में पहला शेष शून्य था, लेकिन दोनों 04 समूह बाकी थे और जरूरी थे। यदि शेष शून्य है और बाकी सभी जोड़े 00 हैं, तो उन्हें भी आगे लें या वर्गमूल के संबंधित स्थानों पर शून्य भरें। सटीक परिणाम तभी लें जब सभी आवश्यक स्थानों का हिसाब हो गया हो और शेष शून्य हो।

दशमलव का स्थान जाँचें

उत्तर पढ़ने से पहले 0.0009 के अंकों के जोड़े बनाएँ।

प्रतिक्रिया: 0 . 00 | 09। पूर्णांक समूह से वर्गमूल 0 मिलता है। पहला दशमलव जोड़ा 00 दशांश अंक 0 देता है। अगले जोड़े 09 के लिए $q = 0$ और $d = 3$ से $(0 + 3) \times 3 = 9$ मिलता है, इसलिए शतांश अंक 3 है। अतः $\sqrt{0.0009} = 0.03$; $(0.03)^2 = 0.0009$ । दशांश स्थान का शून्य छोड़ने पर गलत उत्तर 0.3 मिल जाएगा।

यदि शेष अशून्य बना रहे, तो और जोड़े लेने से आगे के अंक मिलेंगे; बीच में रोका गया दशमलव अपने-आप सटीक वर्गमूल नहीं है। किसी दशमलव स्थान तक सन्निकट मान लिखने के लिए कम से कम उसके अगले अंक तक निकालें और पिछले पाठ का पूर्णांकन नियम लगाएँ।

7 सटीक भिन्न और उचित सीमाएँ

$a \geq 0$ और $b > 0$ के लिए $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$ । सरल सटीक प्रश्नों में पहले भिन्न को सरल करके देखें कि अंश और हर पूर्ण वर्ग हैं या नहीं। यह नियम इसलिए सही है क्योंकि दाईं ओर के अन्तःस्थानक भागफल का वर्ग a/b है। विशेष रूप से, $\sqrt{(49/100)} = 7/10 = 0.7$, इसलिए $\sqrt{0.49} = 0.7$ है, 0.07 नहीं।

हल किया उदाहरण 6 सटीक मान या सीमाओं वाला अनुमान

A $\sqrt{(81/196)}$ निकालिए

$81 = 9^2$ और $196 = 14^2$ । इसलिए $\sqrt{(81/196)} = 9/14$ । जाँच: $(9/14) \times (9/14) = 81/196$ । वर्गमूल में अंश और हर दोनों का योगदान है।

B $\sqrt{70}$ की सीमाएँ तय करके अनुमान सुधारें

1. $8^2 = 64 < 70 < 81 = 9^2$, इसलिए $8 < \sqrt{70} < 9$ । ये क्रमागत पूर्णांकों की सीमाएँ हैं।

2. इस अंतराल का अर्थ यह नहीं कि वर्गमूल इसका मध्य मान 8.5 है। वास्तव में $8.5^2 = 72.25$ है, 70 नहीं।

3. अधिक संकीर्ण अंतराल के लिए $8.3^2 = 68.89 < 70$ और $8.4^2 = 70.56 > 70$, इसलिए $8.3 < \sqrt{70} < 8.4$ ।

4. निकटतम दशांश तक पूर्णांकन करने के लिए मध्य मान 8.35 जाँचें: $8.35^2 = 69.7225 < 70$, इसलिए $\sqrt{70}$, 8.35 से बड़ा है। अतः निकटतम दशांश तक $\sqrt{70} \approx 8.4$ । सन्निकट मान के लिए $\approx$ लिखें, = नहीं।

परिमेय और अपरिमेय का संक्षिप्त अंतर

परिमेय संख्या को पूर्णांकों p और q , जहाँ $q \neq 0$ है, के लिए p/q लिखा जा सकता है। उसका दशमलव प्रसार सांत होता है या आगे जाकर अंकों का निश्चित खंड बार-बार दोहराता है। अपरिमेय संख्या इस रूप में नहीं लिखी जा सकती; उसका दशमलव न समाप्त होता है, न आगे जाकर कोई निश्चित खंड लगातार दोहराता है।

अऋणात्मक पूर्णांक N के लिए $\sqrt{N}$ तभी परिमेय है जब N पूर्ण वर्ग है। इसलिए $\sqrt{81} = 9$ परिमेय है, जबकि $\sqrt{70}$ अपरिमेय है। छोटा-सा कारण परिचित अभाज्य गुणनखंडों से समझें: यदि न्यूनतम रूप में $\sqrt{N} = p/q$ और $q > 0$ है, तो $p^2 = N \times q^2$ । q को भाग देने वाला कोई भी अभाज्य गुणनखंड p^2 को, और इसलिए p को भी, भाग देगा। यह p/q के न्यूनतम रूप में होने के विरुद्ध है। इसलिए $q = 1$ होना चाहिए; वर्गमूल पूर्णांक होगा और N उसी का वर्ग होगा। $N = 0$ के लिए वर्गमूल सीधे 0 है।

कैलकुलेटर पर $\sqrt{70}$ के सीमित अंक दिखना केवल सन्निकट मान है, सटीक दशमलव के समाप्त होने का प्रमाण नहीं। हर वर्गमूल अपरिमेय नहीं है: $\sqrt{0.49} = 0.7$ और $\sqrt{(81/196)} = 9/14$ परिमेय हैं।

8 गुणनफल और योग के नियम अलग हैं

अऋणात्मक वास्तविक a और b के लिए $\sqrt{(a \times b)} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ । भाग के लिए $b > 0$ भी जरूरी है। प्रस्तावित अऋणात्मक परिणाम का वर्ग करके इन नियमों की जाँच होती है। इनसे योग के लिए ऐसा ही नियम नहीं मिलता।

हल किया उदाहरण 7 योग का वर्गमूल बाँटने की गलती

क्या $\sqrt{(16 + 9)} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$ है?

1. बाईं ओर: $\sqrt{(16 + 9)} = \sqrt{25} = 5$ ।

2. दाईं ओर: $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ ।

3. चूँकि $5 \neq 7$, दावा गलत है। वर्गमूल चिह्न के अंदर पूरा योग पहले निकालना चाहिए।

गलती की जाँच: एक प्रतिउदाहरण किसी सामान्य नियम को गलत सिद्ध कर देता है। इसका अर्थ यह नहीं कि “दोनों पक्ष कभी बराबर नहीं हो सकते”: एक पद शून्य हो, तो वे बराबर होते हैं। बात यह है कि हर अऋणात्मक जोड़ी के लिए योग का वर्गमूल इस तरह अलग करने का नियम नहीं है।

9 स्वतंत्र अभ्यास

उत्तरमाला से पहले सभी बारह प्रश्न करें। हर प्रश्न में एक विकल्प चुनें और एक कारण या गणना लिखें। यह मौलिक सीखने का अभ्यास है, जिसमें समय-सीमा, ऋणात्मक अंक या उत्तीर्ण होने की न्यूनतम अंक-शर्त नहीं है; यह पूरा RRB CBT अभ्यास-पत्र नहीं है।

1. 23^2 का मान क्या है?

- A. 46
 - B. 69
 - C. 529
 - D. 523
-

2. मुख्य वर्गमूल $\sqrt{225}$ का मान क्या है?

- A. -15
 - B. 15
 - C. ± 15
 - D. 25
-

3. $\sqrt{0}$ का मान क्या है?

- A. -1
 - B. 1
 - C. अपरिभाषित
 - D. 0
-

4. कौन-सा इकाई अंक तुरंत बता देता है कि पूर्णांक पूर्ण वर्ग नहीं है?

- A. 2
 - B. 4
 - C. 6
 - D. 9
-

5. अभाज्य गुणनखंडन से $\sqrt{2025}$ निकालिए।

- A. 40
 - B. 45
 - C. 55
 - D. 90
-

6. 588 को किस सबसे छोटे धनात्मक पूर्णांक से गुणा करने पर पूर्ण वर्ग पूर्णांक मिलेगा?

- A. 2
 - B. 6
 - C. 12
 - D. 3
-

7. 720 का कौन-सा सबसे छोटा धनात्मक पूर्णांक भाजक पूर्ण वर्ग पूर्णांक भागफल देता है?

- A. 5
 - B. 10
 - C. 15
 - D. 20
-

8. अंकों के जोड़ों की दीर्घ भाग विधि से $\sqrt{10.24}$ निकालिए।

- A. 0.32
 - B. 32
 - C. 3.2
 - D. 5.12
-

9. $\sqrt{(121/144)}$ निकालिए।

- A. 11/144
 - B. 121/12
 - C. 12/11
 - D. 11/12
-

10. $\sqrt{150}$ किन क्रमागत पूर्णांकों के बीच है?

- A. $10 < \sqrt{150} < 11$
 - B. $12 < \sqrt{150} < 13$
 - C. $14 < \sqrt{150} < 15$
 - D. $150 < \sqrt{150} < 151$
-

11. कौन-सा विकल्प $\sqrt{64}$ और $x^2 = 64$ के सभी वास्तविक हल सही देता है?

- A. $\sqrt{64} = \pm 8$; $x = 8$ या -8
 - B. $\sqrt{64} = -8$; केवल $x = 8$
 - C. $\sqrt{64} = 8$; $x = 8$ या -8
 - D. $\sqrt{64} = 8$; केवल $x = 8$
-

12. दावे $\sqrt{(25 + 144)} = \sqrt{25} + \sqrt{144}$ की सही गणना और सही निष्कर्ष कौन-से हैं?

- A. गलत: बायाँ पक्ष 13, दायाँ पक्ष 17
 - B. सही: दोनों पक्ष 17
 - C. सही: दोनों पक्ष 13
 - D. गलत: बायाँ पक्ष 169, दायाँ पक्ष 17
-

10 कारण सहित उत्तरमाला

1. **C.** 23^2 का अर्थ 23×23 है। $23 \times 20 = 460$ और $23 \times 3 = 69$ निकालकर जोड़ें: $460 + 69 = 529$ । 2 से गुणा करने पर 46 मिलता है; यह वर्ग करना नहीं है।
2. **B.** $15^2 = 225$ और 15 अक्रणात्मक है, इसलिए $\sqrt{225} = 15$ । दोनों चिह्न वाले मान $x^2 = 225$ के हल हैं, लेकिन वर्गमूल चिह्न केवल मुख्य वर्गमूल दर्शाता है।
3. **D.** $0^2 = 0$, इसलिए $\sqrt{0} = 0$ । शून्य का वर्गमूल परिभाषित है। इसे शून्य से भाग देने से न मिलाएँ; शून्य से भाग अपरिभाषित है।
4. **A.** 0 से 9 तक के अंकों का वर्ग करने पर केवल 0, 1, 4, 5, 6 और 9 इकाई अंक मिलते हैं। अंतिम अंक 2 असंभव है। स्वीकार्य अंतिम अंक 4, 6 और 9 अकेले पूर्ण वर्ग होने का प्रमाण नहीं हैं।
5. **B.** $2025 = 81 \times 25 = 3^4 \times 5^2$ । हर जोड़े से एक गुणनखंड लेने पर $3^2 \times 5 = 45$ मिलता है। जाँच: $45^2 = 2025$ ।
6. **D.** $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$ । केवल अभाज्य गुणनखंड 3 की गिनती विषम है, इसलिए सबसे छोटा गुणक 3 है। तब $588 \times 3 = 1764 = 42^2$ । गुणक 12 से भी पूर्ण वर्ग मिलता है, लेकिन वह सबसे छोटा नहीं है।
7. **A.** $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ । सभी अभाज्य गुणनखंडों की गिनती सम करने के लिए एक 5 हटाएँ: $720 \div 5 = 144 = 12^2$ । हर उपयुक्त भाजक में 5 शामिल होना जरूरी है, इसलिए 5 सबसे छोटा है।
8. **C.** समूह 10 . 24 बनाएँ। पहले अंक 3 से $3^2 = 9$ और शेष 1 मिलता है। वर्गमूल में 3 के बाद दशमलव बिंदु रखें। 24 नीचे लाने पर 124 मिलता है; 2 चुनें, क्योंकि $(60 + 2) \times 2 = 124$ । अतः $\sqrt{10.24} = 3.2$; जाँचें कि $3.2^2 = 10.24$ ।
9. **D.** अंश 11^2 और हर 12^2 है, इसलिए अक्रणात्मक वर्गमूल $11/12$ है। अंश और हर दोनों का वर्ग करके जाँच होती है। $121/144$, 1 से छोटा है, इसलिए उसका वर्गमूल भी 1 से छोटा है।
10. **B.** $12^2 = 144 < 150 < 169 = 13^2$, इसलिए $12 < \sqrt{150} < 13$ । इन सीमाओं का अर्थ यह नहीं कि वर्गमूल 12.5 है; 12.5 का वर्ग 156.25 होता है।
11. **C.** वर्गमूल चिह्न अक्रणात्मक मूल 8 चुनता है। 8^2 और $(-8)^2$ दोनों 64 हैं, इसलिए समीकरण के दोनों हल हैं। केवल 8 लिखने पर एक वास्तविक हल छूट जाता है।
12. **A.** बायाँ पक्ष $\sqrt{169} = 13$ है, जबकि दायाँ पक्ष $5 + 12 = 17$ है। $13 \neq 17$ होने से दावा गलत है। बाईं ओर वर्गमूल के अंदर जोड़ना अंतिम चरण नहीं है; योग का वर्गमूल भी निकालना है।

आगे बढ़ने से पहले

बोलकर समझाएँ कि स्वीकार्य अंतिम अंक पर्याप्त क्यों नहीं है, जाँच वाले भाजक को पूरे नए वर्गमूल के बजाय नए अंक से गुणा क्यों करते हैं, और दशमलव बिंदु या शून्य अंक क्यों नहीं छोड़ सकते। अभ्यास की कोई गलती बाकी हो, तो संबंधित हल किया उदाहरण दोहराएँ और वर्ग करके अपना उत्तर जाँचें।

11 स्रोत और सीमा

- RRB CEN 09/2025 §14.1, गणित पाठ्यक्रम: https://www.rrbthiruvananthapuram.gov.in/assets/pdf/FinalDetailed_CEN_092025_Level1updated_on_30012026.pdf#page=28। इसका उपयोग विषय की सीमा के लिए हुआ है; आधिकारिक खोज-सूची में पाठ देखा गया, लेकिन इस स्रोत-जाँच में PDF फ़ाइल प्रमाणित नहीं हुई।
- IIT Kanpur SATHEE पर NCERT कक्षा VIII गणित अध्याय 5: §§5.1-5.2, 5.5.1, 5.5.3-5.5.4 और 5.6, वर्ग, वर्गमूल के अर्थ, गुणनखंडन और अंकों के जोड़ों की विधि के लिए: <https://sathee.iitk.ac.in/sathee-railway-exams/student-corner/ncert-books/class-08/mathematics/chapter-5-squares-and-square-roots/>। संबंधित आधिकारिक खोज-सूची का पाठ देखा गया; आधिकारिक होस्ट पर मुद्रित संस्करण और पृष्ठ-विन्यास प्रमाणित नहीं हुए।

- NIOS माध्यमिक गणित 211 अध्याय 1, परिमेय और अपरिमेय संख्याएँ, विशेष रूप से §1.10, मुद्रित पृष्ठ 28: <https://digital.nios.ac.in/content/211en/Chapter-1.pdf>
- केवल दृश्य जाँच के लिए: तीसरे पक्ष के होस्ट पर NCERT नाम वाला पुनर्मुद्रण 2024-25 अध्याय, <https://ncert24.com/assets/ots/pdf/ncert-books-class-8-maths-chapter-5.pdf>, §§5.5.4-5.6, मुद्रित पृष्ठ 65-68। इसके बाइट आधिकारिक होस्ट की NCERT PDF से समान हैं या नहीं, यह प्रमाणित नहीं है। यहाँ स्रोत का कोई पृष्ठ, चित्र या हल का विन्यास पुनः प्रस्तुत नहीं किया गया है।

इस पाठ की व्याख्याएँ, हल और पाठ-आधारित विन्यास स्वतंत्र रूप से लिखे गए हैं। सामान्य गणितीय संख्याएँ पाठ्यपुस्तक की तालिकाओं या अभ्यासों में भी मिल सकती हैं। अगले अंक के नियम और संख्यात्मक चरणों की स्वतंत्र जाँच हुई है; विधि की परिभाषा के लिए स्रोत के शब्दों की नकल नहीं की गई है।

विचार को समझने का ठोस उदाहरण

वर्गाकार व्यवस्था से एक भुजा की गिनती तक

49 एक जैसी टाइलों को वर्गाकार जाली में सजाने की कल्पना करें। हर पंक्ति में जितनी टाइलें हों, हर स्तंभ में भी उतनी ही होनी चाहिए। सात पंक्तियों में सात-सात टाइलें लगाने पर $7 \times 7 = 49$ टाइलें लगती हैं, इसलिए एक भुजा पर टाइलों की संख्या $\sqrt{49} = 7$ है।

एक भुजा पर टाइलों की गिनती -7 नहीं हो सकती। इससे समझ आता है कि मुख्य वर्गमूल अऋणात्मक क्यों चुना जाता है। लेकिन अलग संख्या-समीकरण $x^2 = 49$ में 7 और -7 दोनों हल हैं, क्योंकि दोनों का वर्ग 49 है। टाइलों का भौतिक मॉडल ऋणात्मक हल नहीं दिखाता।

50 टाइलें हों, तो सभी टाइलों से ऐसी पूरी भरी वर्गाकार जाली नहीं बन सकती जिसकी हर भुजा पर टाइलों की गिनती पूर्णांक हो। इसका अर्थ यह नहीं कि $\sqrt{50}$ का वास्तविक मान नहीं है; वह 7 और 8 के बीच है। टाइलों की तुलना पूर्ण वर्ग पूर्णांकों और मुख्य वर्गमूल के चुनाव को समझाती है, पूरी दीर्घ भाग विधि को नहीं।

त्वरित संदर्भ

अर्थ और चिह्न

- $a^2 = a \times a$; वास्तविक संख्या का वर्ग अऋणात्मक होता है
- $a \geq 0$ के लिए $\sqrt{a}$ अऋणात्मक मुख्य वर्गमूल है; $\sqrt{0} = 0$
- $a > 0$ के लिए $x^2 = a$ के हल $x = \sqrt{a}$ और $x = -\sqrt{a}$ हैं; $x^2 = 0$ का केवल एक हल $x = 0$ है
- ऋणात्मक संख्या का वास्तविक वर्गमूल नहीं होता; $\sqrt{((-6)^2)} = 6$

पूर्ण वर्ग पूर्णांक की जाँच

- स्वीकार्य अंतिम अंक: $0, 1, 4, 5, 6, 9$; स्वीकार्य अंक पूर्ण वर्ग होने का प्रमाण नहीं है
- अंतिम अंक $2, 3, 7$ या 8 हो, तो पूर्णांक पूर्ण वर्ग नहीं है
- धनात्मक पूर्णांक तभी पूर्ण वर्ग है जब हर अभाज्य गुणनखंड की गिनती सम हो; वर्गमूल के लिए हर जोड़े से एक लें
- 0 और 1 पूर्ण वर्ग हैं; 0 का अभाज्य गुणनखंड न करें
- पूर्ण वर्ग पूर्णांक बनाने वाला सबसे छोटा धनात्मक पूर्णांक गुणक या सटीक भाजक: विषम गिनती वाले हर अभाज्य गुणनखंड की एक प्रति का गुणनफल लें; कोई ऐसा गुणनखंड न हो, तो 1 लें

अंकों के जोड़ों की दीर्घ भाग विधि

1. दशमलव बिंदु से पूर्णांक अंकों के जोड़े बाईं ओर और दशमलव अंकों के जोड़े दाईं ओर बनाएँ। अंत में अकेला दशमलव अंक बचे, तो उसके दाईं ओर शून्य लगाएँ
 2. पहला समूह: वह सबसे बड़ा अंक चुनें जिसका वर्ग समूह से अधिक न हो, फिर उसका वर्ग घटाएँ
 3. अगला जोड़ा p नीचे लाएँ: नई गणना संख्या = $100 \times \text{पुराना शेष} + p$
 4. अब तक के वर्गमूल अंकों को पूर्णांक q की तरह पढ़ें। 0 से 9 में सबसे बड़ा अंक d चुनें जिसके लिए $(20 \times q + d) \times d$ नई गणना संख्या से अधिक न हो
 5. यह गुणनफल घटाएँ; अंत में d जोड़कर नई संख्या $10 \times q + d$ बनाएँ। अगली जाँच में दशमलव बिंदु हटाकर यही पूरी नई संख्या इस्तेमाल करें
 6. पूर्णांक समूह पूरे होते ही वर्गमूल में दशमलव बिंदु रखें। वर्गमूल के शून्य अंक भी लिखें। दशमलव के बाद अतिरिक्त 00 जोड़े वर्गमूल के अगले स्थान देते हैं
- गुणा नए एकल अंक से करना है, पूरे नए वर्गमूल से नहीं। शेष शून्य होने पर सटीक उत्तर तभी मिलता है जब सभी आवश्यक स्थानों का हिसाब हो गया हो। अन्यथा आगे गणना करें या बताई गई शुद्धता के सन्निकट मान के साथ $\approx$ लिखें।

भिन्न अनुमान और गलतियों की जाँच

- $a \geq 0$ और $b > 0$ के लिए $\sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$; वर्ग करके जाँचें
- $a, b \geq 0$ के लिए $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ कोई सामान्य नियम नहीं है
- $k \geq 0$ और $k^2 < N < (k + 1)^2$ हों, तो $k < \sqrt{N} < k + 1$; सीमाएँ मिलने से वर्गमूल उनका मध्य मान नहीं हो जाता
- अक्राण्णत्मक पूर्णांक N के लिए $\sqrt{N}$ तभी परिमेय है जब N पूर्ण वर्ग हो; कैलकुलेटर के सीमित अंक सटीक मान होने का प्रमाण नहीं हैं
- पूर्णांकन माँगे जाने तक सटीक मान बनाए रखें; उत्तर में माँगी गई शुद्धता बताएँ